



TUGAS AKHIR-SM091501

**STUDI PERBANDINGAN MODEL PENGERINGAN
SUHU RENDAH MENGGUNAKAN METODE BEDA
HINGGA DAN METHOD OF LINES (MOL)**

ULVA QUSNIAH
NRP 1211 100 062

Dosen Pembimbing :
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT- SM091501

***COMPARATIVE STUDY OF LOW TEMPERATURE
DRYING MODEL USING FINITE DIFFERENCE
METHOD AND METHOD OF LINES (MOL)***

ULVA QUSNIAH
NRP 1211 100 062

Supervisor :
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

MATHEMATICS DEPARTMENTS
Faculty of Mathematics and Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

STUDI PERBANDINGAN MODEL PENGERINGAN SUHU RENDAH MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN METHOD OF LINES (MOL)

COMPARATIVE STUDY OF LOW TEMPERATURE DRYING MODEL USING FINITE DIFFERENCE METHOD AND METHOD OF LINES (MOL)

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

ULVA QUSNIAH
NRP. 1211 100 062

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,

Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624 198803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Prof. Dr. Erni Apriliani, M.Si
NIP. 19660814 199102 2 001
Surabaya, Juli 2015

STUDI PERBANDINGAN MODEL PENGERINGAN SUHU RENDAH MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN METHOD OF LINES (MOL)

Nama Mahasiswa : Ulva Qusniah
NRP : 1211 100 062
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstrak

Pengeringan merupakan unit operasi yang penting dalam bidang pengawetan hasil pertanian atau bahan olahan hasil pertanian. Pengeringan biji-bijian dengan temperatur rendah sangat bergantung dengan iklim suatu daerah. Dengan proses yang lambat, proses pengeringan memerlukan biaya yang besar dan sulit. Model matematika dalam masalah pengeringan biji-bijian diformulasikan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial orde satu.

Dalam tugas akhir ini akan dikaji mengenai perbandingan metode numerik dalam penyelesaian model pengeringan suhu rendah. Metode numerik yang digunakan adalah metode beda hingga skema implisit, metode beda hingga skema eksplisit, dan Method of Lines (MOL). Masing-masing metode diuji kestabilannya menggunakan kriteria kestabilan von Neumann. Indikator perbandingan adalah kestabilan, dan galat. Hasil yang diperoleh dalam simulasi, MOL adalah metode yang terbaik untuk menyelesaikan model yang dikaji.

Kata Kunci : Metode Beda Hingga Skema Implisit, Metode Beda Hingga Skema Eksplisit, Method of Lines (MOL), Kriteria Kestabilan von Neumann

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**COMPARATIVE STUDY OF LOW TEMPERATURE
DRYING MODEL USING FINITE DIFFERENCE
METHOD AND METHOD OF LINES (MOL)**

Student Name : Ulva Qusniah
NRP : 1211 100 062
Department : Matematika FMIPA-ITS
Supervisor : Drs. Lukman Hanafi, MSc.

Abstract

Low temperature drying of grain, depends strongly on the climate. Being a slow process, drying proses are costly and difficult. The mathematical models in case of grain drying is formulated in first-order partial differential equation system.

In the final project will be discussed comparison of numerical method in grain drying model solution with low temperature. Numeric methods are applied that is implicit finite difference method, explicit finite difference method, and method of line (MOL). Each method tested the stability by von Neumann criterion. Indicator such as stability and error. The results indicated that Method of Lines was the most adequate to solve the drying models.

Key Words : *implicit finite difference method, explicit finite difference method, Method of Lines (MOL), von Neumann stability criterion*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Segala puji penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu wa Ta'ala karena berkat limpahan karunia dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“STUDI PERBANDINGAN MODEL PENGERINGAN SUHU RENDAH MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN METHOD OF LINES (MOL)”

Dalam penyusunan Tugas akhir, penulis mendapat bantuan dari beberapa pihak. Tanpa bantuan tersebut, tentu penulis menemui banyak kendala dalam menyusun Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika yang memberikan dukungan dan kemudahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku dosen pembimbing yang senantiasa mendukung dan memberikan ilmu dan arahan yang sangat bermanfaat dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T. dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku dosen penguji, yang telah memberikan saran dan kritik yang membangun dalam perbaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp, selaku Koordinator Program Studi S1 Jurusan Matematika yang mendukung penyusunan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dra. Mardijah, MT, selaku Ketua Laboratorium Pemodelan dan Simulasi Sistem yang telah mendukung penyusunan Tugas Akhir ini.
6. Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama ini.
7. Teman-teman angkatan 2011 di Jurusan Matematika ITS.
8. Seluruh keluarga besar Jurusan Matematika yang telah memberikan kemudahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Terima Kasih kepada semua yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini karena tidak dapat disebutkan satu persatu. Penulis juga menyadari bahwa penyusunan Tugas Akhir ini jauh dari sempurna, oleh karenanya kepada semua pembaca Tugas Akhir ini diharapkan kritik dan saran yang membangun guna perbaikan dan memberikan sebuah karya Tugas Akhir yang lebih baik kedepannya.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari pihak-pihak terdekat penulis. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Alloh Subhanahu wa Ta'ala yang telah memberikan rahmat serta pertolongan dalam setiap langkah kehidupan penulis.
2. Ibu dan Bapak. Terima kasih banyak atas doa, dukungan, dan kasih sayang yang dicurahkan kepada penulis. Semoga Alloh senantiasa menjaga Ibu dan Bapak.
3. Suamiku, jazaakallohu khoyron atas dukungan, motivasi dan kesabaran dalam memberikan semangat kepada penulis.
4. Keluarga besarku semuanya, Abu Haidar, si kecil Akmal, mbak Ria, si Kembar Mei, yang telah memberikan semangat kepada penulis.
5. Sahabat-sahabat terdekatku, Afifah, Ifa, Desy, Tutut, Ana, Filsy, yang telah memberikan semangat dan motivasi.
6. Teman-teman angkatan 2011 Matematika ITS, terima kasih atas persahabatan dan kekeluargaan selama ini.
7. Mas Tony dan mbak Arum, terimakasih telah membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang saling memberikan semangat dan motivasi.
9. Seluruh teman-teman yang tidak bisa disebutkan satu per satu, terima kasih atas dukungan dan doanya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i	
LEMBAR PENGESAHAN	iii	
ABSTRAK	v	
ABSTRACT	vii	
KATA PENGANTAR	ix	
DAFTAR ISI	xiii	
DAFTAR GAMBAR	xv	
DAFTAR TABEL	xvii	
DAFTAR SIMBOL	xix	
BAB I PENDAHULUAN		
1.1 Latar Belakang.....	1	
1.2 Rumusan Masalah.....	2	
1.3 Batasan Masalah.....	2	
1.4 Tujuan.....	3	
1.5 Manfaat.....	3	
1.6 Sistematika Penulisan.....	3	
BAB II TINJAUAN PUSTAKA		
2.1 Model Pengeringan Suhu Rendah.....	5	
2.2 Metode Beda Hingga.....	8	
2.2.1 Metode Beda Hingga Skema Implisit.....	9	
2.2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit.....	10	
2.2.3 <i>Method of Lines</i> (MOL).....	11	
2.3 Matriks Tridiagonal.....	12	
2.4 Kriteria Kestabilan von Neumann.....	13	
BAB III METODOLOGI PENULISAN		15
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN		
4.1 Model Pengeringan Suhu Rendah.....	19	
4.2 Penyelesaian Numerik Model Pengeringan Suhu Rendah.....	25	
4.2.1 Metode Beda Hingga Skema Implisit.....	26	
4.2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit.....	36	
4.2.3 <i>Method of Lines</i> (MOL).....	46	
4.3 Simulasi Numerik.....	50	

4.4	Uji Kestabilan	71
4.4.1	Metode Beda Hingga Skema Implisit	71
4.4.2	Metode Beda Hingga Skema Eksplisit	74
4.4.3	<i>Method of Lines</i> (MOL)	75
4.5	Studi Perbandingan Metode Numerik	76
BAB V PENUTUP		
5.1	Kesimpulan	79
5.2	Saran	85
DAFTAR PUSTAKA		87
LAMPIRAN		89

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Parameter dan nilainya	50
Tabel 4.2 Nilai $n_{w_{i,j}}$ untuk $\Delta t = 0,5$	52
Tabel 4.3 Nilai $n_{w_{i,j}}$ untuk $\Delta t = 0,25$	53
Tabel 4.4 Nilai $n_{w_{i,j}}$ untuk $\Delta t = 0,125$	53
Tabel 4.5 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,5$	54
Tabel 4.6 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,25$	54
Tabel 4.7 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,125$	54
Tabel 4.8 Nilai X Analitik dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$	58
Tabel 4.9 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Implisit dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$	58
Tabel 4.10 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$	58
Tabel 4.11 Nilai X menggunakan MOL dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$	59
Tabel 4.12 Nilai X Analitik dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$	59
Tabel 4.13 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Implisit dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$	59
Tabel 4.14 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$	60
Tabel 4.15 Nilai X menggunakan MOL dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$	60
Tabel 4.16 Nilai X Analitik dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$	61
Tabel 4.17 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit	61
Tabel 4.18 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit	62
Tabel 4.19 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan MOL	62

Tabel 4.20 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit..	63
Tabel 4.21 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit	63
Tabel 4.22 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$ menggunakan MOL.....	63
Tabel 4.23 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit..	64
Tabel 4.24 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit	64
Tabel 4.25 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan MOL.....	65
Tabel 4.26 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit..	67
Tabel 4.27 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit	67
Tabel 4.28 Nilai suhu (T_s) dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan MOL.....	68
Tabel 4.29 Perbandingan Metode Numerik.....	76

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Beda Hingga Skema Implisit	10
Gambar 2.2 Beda Hingga Skema Eksplisit.....	10
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian	17
Gambar 4.1 Grid untuk $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$	55
Gambar 4.2 Grid untuk $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$	56
Gambar 4.3 Grid untuk $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$	57
Gambar 4.4 Grafik Nilai X ketika $\Delta t = 0.5$	69
Gambar 4.5 Grafik Nilai X ketika $\Delta t = 0.25$	70
Gambar 4.6 Grafik Nilai X ketika $\Delta t = 0.125$	71

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

a	area permukaan spesifik bed
a_p	area permukaan spesifik partikel
C_{pa}	kalor spesifik udara
C_{ps}	kalor spesifik benda
C_{pas}	kalor spesifik udara kering
C_{pv}	kalor spesifik air dalam wujud uap
C_{pw}	kalor spesifik air dalam wujud likuid
G_a	laju aliran massa udara
L_g	kalor laten desorpsi air
h_v	koefisien transfer kalor antara udara dan biji
L_w	kalor laten air murni
n_w	laju pengeringan
rh_a	kelembaban relatif udara
t	waktu
T_a	temperatur udara
T_s	temperatur biji
X	kadar kelembaban biji
Y	kelembaban absolut udara
z	koordinat bed pengering
Z_{max}	tinggi maksimum bed
ε	fraksi kekosongan bed pengering
ρ_{hb}	nilai kerapatan bahan biji terhadap volume bed pengering
ρ_b	nilai kerapatan bahan biji kering terhadap bed volume
ρ_a	nilai kerapatan bahan biji kering terhadap udara
ρ_s	nilai kerapatan bahan biji kering terhadap partikel volume
i	indeks penentuan nilai diskret dari koordinat bed
j	indeks penentuan nilai waktu diskrit

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dikaji dalam laporan Tugas Akhir ini, yaitu tentang perbandingan metode-metode numerik dalam solusi model pengeringan suhu rendah. Selanjutnya dijabarkan pula batasan dari permasalahan untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan, serta manfaat apa yang dapat diperoleh dari penulisan laporan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Pengeringan produk-produk agrikultur dapat diartikan sebagai proses dimana kandungan air (kadar kelembaban) direduksi/diturunkan menuju ke level/tingkatan tertentu yang diiringi dengan pemeliharaan yang berlangsung lama dan terkendali berlandaskan teknik ekonomi dan menerapkan teori evaporasi. Pengeringan dapat juga diartikan sebagai sebuah reaksi antara panas dan proses transfer massa antara udara pengering dengan produk yang dikeringkan[1].

Pengeringan produk agrikultur, dalam hal ini adalah pengeringan biji-bijian, dilakukan dengan menggunakan temperatur tinggi. Temperatur yang digunakan bervariasi, namun yang pasti, pengeringan dengan temperatur tinggi hampir selalu menggunakan temperatur lebih dari 50°C. Terdapat pengaruh yang signifikan jika pengeringan biji dilakukan dengan menggunakan temperatur tinggi. Beberapa dampak yang nampak adalah lapisan luar biji-bijian menjadi sangat kering, turunnya gradien air dalam biji yang menyebabkan tekanan mekanis, yang pada akhirnya menyebabkan biji-bijian menjadi rusak, dengan kata lain kandungan nutrisi di dalamnya juga berkurang.

Terdapat dua teknik pengeringan biji-bijian. Yaitu pengeringan dengan temperatur tinggi (*High Temperature Drying*) dan pengeringan dengan temperatur rendah (*Low Temperature Drying*) atau *Natural Drying*. *Low Temperature Drying* (LTD) pada umumnya menggunakan suhu lingkungan[2].

Tidak seperti HTD, LTD menggunakan temperatur alami, sehingga proses pengeringan biji memakan waktu yang lama, dan sangat memperhatikan kondisi lingkungan, dimana lingkungan sangat mempengaruhi proses pengeringan.

Pada penelitian sebelumnya yang berjudul “*Mathematical modelling of low temperature drying of maize: Comparison of numerical methods for solving the differential equations*” yang ditulis oleh Martinello, M.A., Munoz, D.J., dan Giner, S.A., menunjukkan hasil Method of Lines (MOL) merupakan metode terbaik bila dibandingkan dengan metode beda hingga Implisit dan Implisit dalam bidang pengeringan suhu rendah di wilayah Argentina.

Merujuk pada penelitian sebelumnya, dalam Tugas Akhir ini akan dikaji mengenai perbandingan metode-metode numerik dari solusi model pengeringan suhu rendah. Metode yang digunakan adalah metode beda hingga skema Implisit, metode beda hingga skema Eksplisit, dan *Method of Lines (MOL)*. Simulasi numerik model persamaan ini disimulasikan menggunakan MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Melihat latar belakang permasalahan yang ada, maka rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian model pengeringan suhu rendah dengan menggunakan metode numerik?
2. Bagaimana analisis hasil yang diperoleh dari studi perbandingan metode-metode numerik dalam menyelesaikan model?
3. Bagaimana kestabilan masing-masing metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan model pengeringan suhu rendah?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dikaji dalam Tugas Akhir ini dibatasi ruang lingkupnya, yaitu:

1. Aliran udara yang melewati papan pengeringan

- diasumsikan seragam (*uniform*).
- 2. Pengeringan bersifat adiabatik (panas yang melewati dinding pengeringan diabaikan).
- 3. Penyusutan biji-bijian selama proses pengeringan diabaikan dan kerapatan massa papan pengeringnya diasumsikan seragam.
- 4. Konduksi panas antar biji-bijian diabaikan
- 5. Air dalam biji mengalami evaporasi selama proses desorpsi dan masuk ke dalam aliran udara sebagai uap air dalam temperatur biji.
- 6. Biji-bijian yang dimaksud dalam Tugas Akhir ini adalah biji jagung.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penulisan laporan Tugas Akhir ini adalah:

- 1. Mengkaji model pengeringan suhu rendah dan mendapatkan solusi numeriknya,
- 2. Menganalisis hasil studi perbandingan metode-metode yang digunakan dalam menyelesaikan model pengeringan suhu rendah.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan laporan Tugas Akhir ini adalah:

- 1. Mendapatkan solusi numerik dari pengeringan suhu rendah.
- 2. Mendapatkan hasil analisis dari studi perbandingan metode-metode numerik dalam solusi pengeringan suhu rendah.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada pada ini dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir. Bab ini meliputi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah,

Tujuan, Manfaat dan Sistematika Penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi materi-materi yang mendukung penulisan laporan Tugas Akhir, antara lain Model Pengeringan suhu rendah, metode beda hingga skema implisit, metode beda hingga skema eksplisit, *Method of Lines* (MOL), matriks tridiagonal, dan kriteria kestabilan von Neumann.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tentang langkah-langkah dan metode yang digunakan dalam penulisan laporan Tugas Akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PENJABARAN

Pada bab ini dijelaskan dan diuraikan hasil analisis dan pembahasan laporan Tugas Akhir ini. Meliputi penyelesaian numerik model pengeringan suhu rendah dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit, metode beda hingga skema eksplisit, *Method of Lines* (MOL), analisis kestabilan von Neumann, simulasi model pengeringan suhu rendah menggunakan MATLAB, dan studi perbandingan metode-metode numerik dalam penyelesaian model adalah berdasarkan kestabilan dan analisis galat.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi simpulan yang diperoleh dari analisis dan pembahasan di bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan Tugas Akhir ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan mengenai model pengeringan suhu rendah, metode beda hingga skema implisit, metode beda hingga skema eksplisit, *Method of Lines* (MOL), matriks tridiagonal dan kriteria kestabilan von Neumann.

2.1 Model Pengeringan Suhu Rendah

Pengeringan merupakan unit operasi yang penting dalam bidang pengawetan hasil pertanian atau bahan olahan hasil pertanian. Pengeringan yang paling umum adalah dengan menjemur pada terik panas matahari. Cara ini merupakan cara yang paling mudah, murah dan konvensional. Namun cara pengeringan seperti ini mempunyai banyak kelemahan bila dioperasikan pada skala besar terutama masalah kebersihan (*higien*) dan ketergantungan pada ada atau tidaknya cahaya matahari.

Dalam proses pengeringan harus diketahui terlebih dulu mengenai karakteristik material yang akan dikeringkan, seperti koefisien perpindahan panas, konduktifitas, dan karakteristik lapisan penyusun butiran.

Pengeringan dengan suhu tinggi (*High Temperature Drying*) dapat menyebabkan butiran biji menjadi rusak karena pada umumnya biji-bijian hasil pertanian tidak tahan terhadap suhu tinggi (*Heat sensitive*). Oleh karena itu sangat dianjurkan pengeringan biji-bijian dilakukan dengan menggunakan temperatur rendah yaitu menggunakan suhu dibawah 100⁰C.[3]

Model pengeringan biji-bijian dengan temperatur rendah diformulasikan ke dalam sistem persamaan berikut[2]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{n_w a}{\rho_{b0}} \\ -G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a = 0 \\ \rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = -G_a L_g \frac{\partial Y}{\partial z} - G_a C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Dalam keadaan *steady state*, persamaan bed pengering, dengan kesetimbangan massa udara dalam benda padat adalah[2]

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{n_w a}{\rho_{b0}} \quad (2.2)$$

Kesetimbangan massa dari uap air dalam udara yang terdapat dalam biji diberikan oleh persamaan berikut[2]

$$-G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a = 0 \quad (2.3)$$

Sedangkan laju pengeringan dinyatakan dalam[2]

$$n_w = \frac{\rho_{s0}}{a_p} \left(-\frac{dX}{dt} \right) \quad (2.4)$$

Besarnya nilai awal kandungan kelembaban dalam biji adalah[2]

$$\rho_{b0} = \frac{\rho_{hb}}{1 + X_0} \quad (2.5)$$

Model pengeringan biji dilengkapi dengan persamaan keseimbangan energi biji dalam wujud padat[2], yaitu

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a}{\rho_{b0} C_{ps}} (h_v (T_a - T_s) - n_w L_g) \quad (2.6)$$

Sistem pengeringan ini, berada dalam kondisi setimbang termal, dimana temperatur udara dan temperatur benda adalah sama. Dengan menerapkan asumsi kesetimbangan termal ini, maka dapat dikatakan bahwa $T_s = T_a$, sehingga $T_s - T_a = 0$. Sehingga diperoleh

$$\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = -G_a \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) L_g - C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

Untuk menghitung laju pengeringan (n_w) di setiap waktu dan posisi di bed pengering, diberikan persamaan *thin layer*[2]

$$X = (X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} + X_e \quad (2.8)$$

Dimana K dan N adalah parameter, yang nilainya:

$$K = -0,0347 + 0,00287 \left(\frac{9T_a}{5} + 32 \right)$$

$$N = 0,54 + 0,00324rh_a$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (2.8) terhadap waktu dan disubstitusikan ke persamaan (2.4), didapat

$$n_w = \frac{\rho_{s0}}{a_p} KN(X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} t^{N-1} \quad (2.9)$$

Kalor pengeringan, direpresentasikan pada pengeringan dasar biji-bijian dan udara. Berdasarkan fungsi kadar kelembaban dan kelembaban[2], didapatkan:

$$C_{ps} = C_{pss} + C_{pw}X$$

$$C_{pa} = C_{pas} + C_{pv}Y$$

Dengan:

C_{ps} : kalor spesifik biji

C_{pa} : kalor spesifik udara

C_{pw} : kalor spesifik air dalam bentuk likuid = $3560 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

C_{pss} : kalor spesifik biji kering = $1465 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

C_{pas} : kalor spesifik udara kering = $1008 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

C_{pv} : kalor spesifik air dalam bentuk uap = $1883 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Hubungan antara kadar kelembaban dan kelembaban relatif di keadaan setimbang, digunakan modifikasi persamaan Chung-Pfost, dengan parameter C_1, C_2, C_3 [2].

$$X_e = -\frac{1}{100C_3} \ln \left(-\frac{\ln(rh_a)(T_{a0} + C_2)}{C_1} \right) \quad (2.10)$$

Dengan:

$$C_1 = 486,1$$

$$C_2 = 56,98$$

$$C_3 = 0,1807$$

Kalor laten yang digunakan untuk menyerap air dalam biji (L_g) dihitung dengan menggunakan persamaan[2]

$$L_g = 2,503 \times 10^6 - 2,386 \times 10^3 (T_a - 273,16) \quad (2.11)$$

Nilai awal dan syarat batas yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan ini adalah:

Nilai Awal:

$$T_s(z, 0) = T_{s_0}$$

$$X(z, 0) = X_0$$

Syarat batas:

$$Y(0, t) = Y_{akhir}$$

$$T_a(0, t) = T_{a_{akhir}}$$

2.2 Metode Beda Hingga

Definisi 1 [4] :

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih derivatif parsial dari suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas.

Sebuah persamaan diferensial apabila didiskritisasi dengan metode beda hingga akan menjadi sebuah persamaan beda. Jika persamaan diferensial mempunyai solusi eksak $F(x, t)$, maka persamaan beda akan mempunyai solusi hampiran $F(x_j, t_n)$.

Ide dasar dari metode beda hingga adalah penggantian derivatif atau turunan parsial yang diperoleh dari ekspansi deret Taylor di dekat titik yang diekspansikan[5]. Jika diberikan fungsi $f(x, t)$, maka derivatif parsial terhadap t adalah

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \approx \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$$

untuk nilai Δt yang kecil, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di titik (x, t) nilai $f(x, t + \Delta t)$ menjadi

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Delta t + O((\Delta t)^2)$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor, pendekatan beda maju, beda mundur dan beda tengah untuk turunan pertama orde pertama adalah

$$\text{beda maju} \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \approx \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\text{beda mundur} \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \approx \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

beda mundur $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \approx \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}$

sedangkan pendekatan beda hingga tengah untuk turunan kedua

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+\Delta x,t) - 2f(x,t) + f(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Dari ekspansi deret Taylor ini, didapatkan Pendekatan Persamaan diferensial Parsial (PDP) dengan metode beda hingga. Jika diberikan fungsi $F(x,t)$ Pendekatan menggunakan beda maju, beda mundur, beda tengah derivatif pertama dan kedua terhadap x dan t adalah sebagai berikut

Beda maju $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{\Delta t}, \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta x}$

Beda mundur $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_{i,j} - F_{i-1,j}}{\Delta t}, \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta x}$

Beda tengah $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta t}, \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta x}$

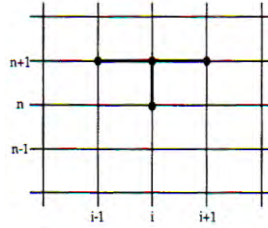
Dan untuk derivatif kedua

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{\left(\frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta x} - \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \approx \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$

Terdapat beberapa skema untuk metode beda hingga, antara lain beda hingga skema implisit dan implisit, Crank-Nicholson, *Leap-frog*, *upwind* implisit, *upwind* eksplisit, DuFort-Frankel, Empat Titik Freissmann dan lain-lain. Namun dalam bab ini hanya diuraikan tentang metode beda hingga skema implisit dan eksplisit saja.

2.2.1 Metode Beda Hingga Skema Implisit

Pada skema Implisit, ruas kanan dari persamaan yang didiskritkan, ditulis pada waktu (t) $n + 1$ yang nilainya belum diketahui[5]. Gambar berikut menunjukkan skema implisit.



Gambar 2.1 Beda Hingga Skema Implisit

Jika diberikan persamaan

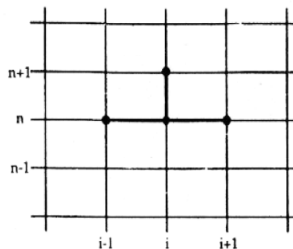
$F_t = \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t}$, maka dengan menggunakan beda hingga skema eksplisit,

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} = c^2 \frac{F_{j-1}^{n+1} - 2F_j^{n+1} + F_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{Dengan } c^2 = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

2.2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variabel n yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema seperti pada gambar, fungsi variabel pada sebuah fungsi dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh skema berikut



Gambar 2.2 Beda Hingga Skema Eksplisit

Jika diberikan persamaan

$$F_t = \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t}, \text{ maka dengan menggunakan beda hingga skema eksplisit,}$$

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} = c^2 \frac{F_{j-1}^n - 2F_j^n + F_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{Dengan } c^2 = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

2.2.3 Method of Lines

Method of Lines (MOL) adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode ini sering digunakan untuk merekonstruksi atau menganalisis metode-metode numerik untuk persamaan diferensial parsial yang diproses melalui diskritisasi pertama dari turunan spasial dan tidak memperhatikan kekontinuan variabel waktu[6]. Jika diberikan fungsi U , maka diskritisasi dengan metode garis yaitu

$$U_x = \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x}$$

Secara umum, langkah-langkah untuk menerapkan MOL dalam sebuah persamaan adalah sebagai berikut[7]:

1. Mempartisi daerah penyelesaian dalam area pemotongan
2. Mendiskritisasi persamaan ke dalam satu koordinat arah
3. Mentransformasi untuk memperoleh persamaan diferensial biasa yang dipisahkan
4. Mentransformasi invers dan memasukkan kondisi batas
5. Mendapatkan solusi dari persamaan

Jika diberikan persamaan adveksi $u_t + vu_x = 0$, dimana dalam ilmu Fisika, v adalah kecepatan linear, maka untuk mengilustrasikan prosedur penggunaan MOL dalam sebuah PDP, diperlukan definisi turunan spasial u_x . Dengan menggunakan definisi MOL, dimana

$$u_x = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

dengan i adalah indeks penentuan nilai diskret sepanjang grid x .

Untuk nilai terkecil di sisi kiri x , $i = 1$, dan nilai terbesar di sisi kanan, $i = N$. Dengan kata lain grid di dalam x mempunyai N titik. Sehingga dikatakan bahwa diskritisasi persamaan Adveksi menggunakan MOL adalah

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad 1 \leq i \leq N$$

Diskritisasi persamaan adveksi menggunakan MOL, menghasilkan satu variabel bebas, yaitu variabel t . Dengan sejumlah N titik di dalam grid x , persamaan di atas merepresentasikan sebuah sistem dengan sejumlah N Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Transformasi persamaan adveksi (PDP) menjadi sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB), mengilustrasikan penerapan MOL untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial, atau yang dinamakan pemindahan turunan spasial.

Pada persamaan adveksi di atas, mempunyai nilai awal dan syarat batas sebagai berikut

$$u(x, t = 0) = f(x)$$

$$u(x = 0, t) = g(t)$$

Transformasi persamaan adveksi di atas menjadi sistem PDB. Sehingga untuk nilai awal dan syarat batas menjadi

$$u(x_i, t = 0) = f(x_i)$$

$$u(x_i = 0, t) = g(t_i)$$

Jika PDP dapat diselesaikan secara analitik, maka akan menghasilkan solusi analitik dengan sejumlah N fungsi, yaitu

$$u_1(t), u_2(t) \dots u_{N-1}(t), u_N(t)$$

2.3 Matriks Tridiagonal

Matriks Tridiagonal adalah sebuah matriks persegi dengan unsur nol hanya pada diagonal dan slot horizontal atau vertikal yang berdekatan diagonal (yaitu, sepanjang subdiagonal dan superdiagonal)[8]. Jika \mathbf{A} adalah matriks berukuran $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, maka matriks \mathbf{A} dinamakan matriks tridiagonal jika $\mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{0}$ kapanpun $\mathbf{i} + \mathbf{1} \leq \mathbf{j}$ atau $\mathbf{j} + \mathbf{1} \leq \mathbf{i}$. Matriks tridiagonal \mathbf{A} diberikan sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m-2,n-3} & a_{m-2,n-2} & a_{m-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{m-1,n-2} & a_{m-2,n-1} & a_{m-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah untuk mendapatkan matriks tridiagonal yaitu

1. Mengubah PDP menjadi persamaan beda, yaitu diskritisasi PDP menggunakan pendekatan metode beda hingga
2. Memasukkan nilai i dan j , dengan i dan j adalah indeks penentuan nilai diskrit sepanjang koordinat x dan y
3. Membentuk Sistem Persamaan Linear (SPL)

2.4 Kriteria Kestabilan von Neumann

Dalam analisis numerik, uji kestabilan von Neumann adalah sebuah metode yang digunakan untuk menguji kestabilan skema beda hingga yang diaplikasikan pada persamaan diferensial parsial linear. Stabilitas numerik sangat erat kaitannya dengan galat numerik. Sebuah skema beda hingga dikatakan stabil jika galat yang terjadi pada satu perhitungan *time step* tidak menyebabkan peningkatan galat pada komputasi selanjutnya. Sebaliknya, jika galat terus bermunculan, maka solusi mengalami penyimpangan dan dikatakan tidak stabil.

Jika berikan persamaan beda $X_{j,n} = X_{j,n+1} + X_{j+1,n+1}$, maka untuk menguji kestabilan PDP, disubstitusikan $X_{j,n} = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan. Sedemikian hingga dicari nilai ρ , dengan ρ dinamakan faktor amplifikasi. Persamaan beda hingga dikatakan stabil jika memenuhi kondisi $|\rho| \leq 1$.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

3.1 Langkah Pengerjaan

1. Studi Literatur

Studi literatur mengenai model pengeringan biji-bijian dengan temperatur rendah, mempelajari tentang metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan model, studi kestabilan metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan model, studi tentang analisis galat. Konsep-konsep ini didapat dari buku-buku literatur, jurnal, paper, prosiding, maupun artikel dari internet.

2. Menyelesaikan model dengan Metode Numerik

Terdapat tiga metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan model. Metode tersebut adalah metode beda hingga skema implisit, metode beda hingga skema eksplisit, dan *Method of Lines* (MOL).

3. Menganalisis Kestabilan masing-masing Metode

Menganalisis kestabilan masing-masing metode dilakukan dengan cara menerapkan kriteria kestabilan von Neumann.

4. Simulasi

Pada tahap ini, sistem persamaan diselesaikan dengan menggunakan MATLAB, dengan langsung mendefinisikan parameter-paramater yang telah diketahui beserta syarat-syarat yang diperlukan dalam menyelesaikan sistem persamaan. Langkah-langkah dalam tahap ini yaitu

- a. Menginputkan nilai parameter yang diketahui
- b. Menginputkan nilai panjang awal z_0 , panjang akhir z_t , waktu awal t_0 dan waktu akhir t_t
- c. Memasukkan nilai Δz dan Δt , yaitu Δz_1 , Δz_2 , Δz_3 , Δt_1 , Δt_2 dan Δt_3 .
- d. Membentuk matriks tridiagonal

- e. Plot grafik kadar kelembaban (X)

5. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini, penulis melakukan analisis terhadap hasil yang diperoleh dari simulasi yang meliputi

- a. Nilai kadar kelembaban (X) dan suhu (T_s) di setiap Δz dan Δt yang diberikan
- b. Kestabilan masing-masing metode yang digunakan, yaitu kestabilan metode beda hingga skema Implisit dan Implisit, dan *Method of Lines* (MOL)
- c. Plot grafik dari nilai kadar kelembaban (X)

6. Studi Perbandingan Metode Numerik

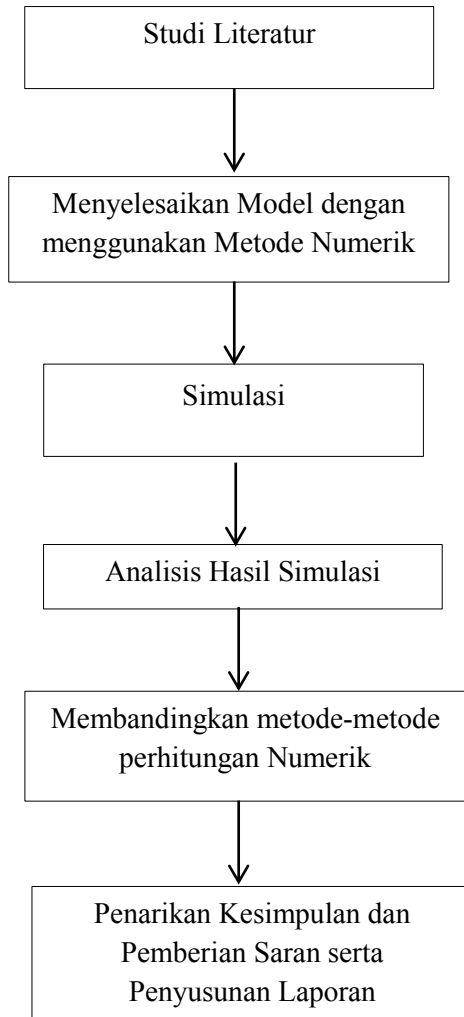
Dalam tahap simulasi tidak hanya menyelesaikan sistem persamaan menggunakan satu metode. Namun ada tiga metode yang digunakan sehingga masing-masing metode menghasilkan hasil yang berbeda. Pada tahap ini, ketiga metode yang digunakan akan dibandingkan dengan parameter pembandingnya adalah kestabilan dan galat.

7. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan mengenai perbandingan metode-metode numerik dalam solusi model pengeringan dengan suhu rendah. Selanjutnya diberikan saran yang dapat digunakan sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya.

3.2 Diagram Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan dalam Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan tentang model pengeringan suhu rendah beserta penyelesaian numeriknya. Dilanjutkan dengan perbandingan hasil dari metode-metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan model. Langkah awal yang dilakukan adalah menyelesaikan model dengan pendekatan beda hingga dan mengevaluasi kestabilan dari masing-masing metode. Pada sub bab berikutnya, hasil yang diperoleh dari penyelesaian numerik disimulasikan menggunakan MATLAB.

4.1 Model Pengeringan Suhu Rendah

Pada umumnya zat esensial yang terkandung dalam bahan hasil pertanian tidak tahan terhadap suhu tinggi. Untuk menghindari kerusakan bahan tersebut pengeringan dengan temperatur rendah.

Pengeringan pada temperatur rendah bertujuan untuk mempertahankan zat esensial yang ada pada zat organik terutama bahan yang berasal dari hasil pertanian. Hal ini sangat dianjurkan. Ada banyak faktor yang mempengaruhi kualitas bahan yang dikeringkan. Faktor yang sangat mempengaruhi adalah tinggi rendahnya temperatur udara pengering.

Model pengeringan biji diformulasikan ke dalam sistem persamaan berikut[2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= -\frac{n_w a}{\rho_{bo}} \\ -G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a &= 0 \\ \rho_{bo} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} &= -G_a \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) L_g - G_a \left(C_{pa} \frac{\partial T_a}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

dengan

- X : kadar kelembaban biji
- Y : kelembaban absolut udara
- T_s : temperatur biji
- a : area permukaan spesifik bed

n_w : laju pengeringan
 ρ_{b0} : nilai awal kerapatan bahan biji kering terhadap volume bed
 G_a : laju aliran massa udara
 L_g : kalor laten desorpsi air
 C_{ps} : kalor spesifik benda
 C_{pa} : kalor spesifik udara

Sistem persamaan (4.1) diperoleh melalui perhitungan sebagai berikut

Diberikan persamaan bed pengering dalam kondisi *steady state*[2]

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{n_w a}{\rho_{b0}} \quad (4.2)$$

Kesetimbangan massa uap air dalam udara yang terdapat dalam biji diberikan oleh persamaan[2]

$$-G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a = 0 \quad (4.3)$$

Sedangkan laju pengeringan dinyatakan dalam[2]

$$n_w = \frac{\rho_{s0}}{a_p} \left(-\frac{dX}{dt} \right) \quad (4.4)$$

dengan:

a_p : area permukaan spesifik partikel
 ρ_{s0} : nilai awal rasio bahan biji kering terhadap partikel volume

Besarnya nilai awal kandungan kelembaban dalam biji adalah[2]

$$\rho_{b0} = \frac{\rho_{hb}}{1 + X_0} \quad (4.5)$$

dengan

ρ_{hb} : nilai kerapatan bahan biji terhadap volume bed pengering

Model pengeringan biji dilengkapi dengan persamaan keseimbangan energi biji dalam wujud padat[2]

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a}{\rho_{b0} C_{ps}} (h_v(T_a - T_s) - n_w L_g) \quad (4.6)$$

dengan

h_v : koefisien transfer kalor antara udara dan biji

T_a : temperatur udara

Dan persamaan pertukaran udara ke dalam biji-bijian adalah[2]

$$-\frac{h_v a}{\rho_a \varepsilon_0 C_{pa}} (T_a - T_s) - \frac{G_a}{\rho_a \varepsilon_0} \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_a \varepsilon_0 C_{pa}} + [n_w a C_{pv} (T_s - T_a)] = 0 \quad (4.7)$$

dengan

ρ_a : nilai kerapatan bahan biji kering

ε_0 : fraksi/nilai awal kekosongan bed pengering

C_{pv} : kalor spesifik air dalam wujud uap

Langkah pertama dalam menurunkan model pengeringan suhu rendah adalah dengan menyederhanakan Persamaan (4.7). sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$-\frac{h_v a}{\rho_a \varepsilon_0 C_{pa}} (T_a - T_s) - \frac{G_a}{\rho_a \varepsilon_0} \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_a \varepsilon_0 C_{pa}} [n_w a C_{pv} (T_s - T_a)] = 0$$

$$\frac{1}{\rho_a \varepsilon_0} \left[\left(\frac{-h_v a}{C_{pa}} (T_a - T_s) \right) - G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) + \left(\frac{n_w a C_{pv}}{C_{pa}} (T_s - T_a) \right) \right] = 0$$

$$\left(\frac{-h_v a}{C_{pa}} (T_a - T_s) \right) - G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) + \left(\frac{n_w a C_{pv}}{C_{pa}} (T_s - T_a) \right) = 0$$

$$\left(\frac{-h_v a}{C_{pa}} (T_a - T_s) \right) + \left(\frac{n_w a C_{pv}}{C_{pa}} (T_s - T_a) \right) = G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$\frac{1}{C_{pa}} [n_w a C_{pv} (T_s - T_a) - h_v a (T_a - T_s)] = G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - h_v a(T_a - T_s) = C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$h_v a(T_a - T_s) = n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) \quad (4.8)$$

Dari persamaan (4.6), diperoleh

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a}{\rho_{b0} C_{ps}} (h_v(T_a - T_s) - n_w L_g)$$

$$\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = a(h_v(T_a - T_s) - n_w L_g)$$

$$\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} + n_w a L_g = h_v a(T_a - T_s) \quad (4.9)$$

Kemudiandari persamaan (4.3) didapatkan

$$n_w a = G_a \frac{\partial Y}{\partial z} \quad (4.10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaann (4.9) dan (4.10) ke dalam persamaan (4.8) diperoleh

$$n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - h_v a(T_a - T_s) = C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - \left(\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} + n_w a L_g \right) = C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - \rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} - n_w a L_g = C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - \rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} - G_a \frac{\partial Y}{\partial z} L_g = C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right)$$

$$\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) - G_a \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) L_g$$

$$\rho_{b0} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = n_w a c_{pv}(T_s - T_a) - C_p a G_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} \right) - G_a \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) L_g \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) merepresentasikan sistem pengeringan ini berada dalam kondisi setimbang termal, dimana temperatur udara dan temperatur benda adalah sama. Dengan menerapkan asumsi kesetimbangan termal, maka dapat dikatakan bahwa $T_s = T_a$, sehingga $T_s - T_a = 0$, akibatnya $n_w a c_{pv}(T_s - T_a) = 0$ Sehingga persamaan (4.11) menjadi

$$\begin{aligned}\rho_{b0}C_{ps}\frac{\partial T_s}{\partial t} &= 0 - G_a\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)L_g - C_p a G_a\left(\frac{\partial T_a}{\partial z}\right) \\ \rho_{b0}C_{ps}\frac{\partial T_s}{\partial t} &= -G_a\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)L_g - C_p a G_a\left(\frac{\partial T_a}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Untuk menghitung laju pengeringan (n_w) di setiap interval waktu dan posisi di bed pengering, diberikan persamaan *thin layer*[2]

$$\begin{aligned}X &= (X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} + X_e \\ (X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} &= X - X_e\end{aligned}\quad (4.13)$$

Dimana K dan N adalah parameter, yang nilainya:

$$\begin{aligned}K &= -0,0347 + 0,00287\left(\frac{9T_a}{5} + 32\right) \\ N &= 0,54 + 0,00324rh_a\end{aligned}$$

Parameter K dan N berkaitan dengan fungsi laju pengeringan $n_w(t)$, oleh karena itu untuk mendapatkan hubungan antara $n_w(t)$ dengan parameter K dan N , persamaan (4.13) didiferensialkan terhadap t . Dimana

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\left((X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} + X_e\right)}{dt}$$

Dimisalkan

$$u = Kt^N$$

dan

$$X = (X_0 - X_e)e^{-u}$$

$$\text{maka } \frac{du}{dt} = KNt^{N-1} \quad \text{dan } \frac{dX}{du} = -(X_0 - X_e)e^{-u}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \frac{dX}{du} \frac{du}{dt} \\ &= -(X_0 - X_e)e^{-u}KNt^{N-1} \\ &= -KN(X_0 - X_e)e^{-u}t^{N-1} \\ &= -KN(X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)}t^{N-1}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Kemudian persamaan (4.14) disubstitusikan ke dalam

persamaan (4.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 n_w &= \frac{\rho_{s0}}{a_p} \left(-\frac{dX}{dt} \right) \\
 &= \frac{\rho_{s0}}{a_p} - \left(-KN(X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)}t^{N-1} \right) \\
 &= \frac{\rho_{s0}}{a_p} KN(X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)}t^{N-1} \\
 &= \frac{\rho_{s0}}{a_p} KN(X - X_e)t^{N-1}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Kalor pengeringan, direpresentasikan pada pengeringan dasar biji-bijian dan udara. Berdasarkan fungsi kadar kelembaban($X(t)$) dan kelembaban(Y)[2], dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned}
 C_{ps} &= C_{pss} + C_{pw}X \\
 C_{pa} &= C_{pas} + C_{pv}Y
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

dengan:

$$C_{pw} = 3560$$

$$C_{pss} = 1465$$

$$C_{pas} = 1008$$

$$C_{pv} = 1883$$

Hubungan antara kadar kelembaban dan kelembaban relatif udara dalam keadaan setimbang, digunakan modifikasi persamaan Chung-Pfost, dengan parameter C_1, C_2, C_3 [2].

$$X_e = -\frac{1}{100C_3} \ln \left(-\frac{\ln(rh_a)(T_{a0} + C_2)}{C_1} \right) \tag{4.11}$$

Dengan:

rh_a : kelembaban relatif udara

$$C_1 = 486,1$$

$$C_2 = 56,98$$

$$C_3 = 0,1807$$

Kalor laten yang digunakan untuk menyerap air dalam biji(L_g) dihitung dengan menggunakan persamaan[2]

$$\tag{4.12}$$

$$L_g = 2,503 \times 10^6 - 2,386 \times 10^3 (T_a - 273,16)$$

Nilai awal dan syarat batas yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan ini adalah

$$t = 0, X = X_0, T_s = T_{s_0}, \quad 0 \leq z \leq z_{max}$$

$$z = 0, Y = Y_{akhir}, T_a = T_{akhir}, \quad t > 0$$

Atau dapat dituliskan

Nilai Awal

$$T_s(z, 0) = T_{s_0}$$

$$X(z, 0) = X_0$$

Syarat batas

$$Y(0, t) = Y_{akhir}$$

$$T_a(0, t) = T_{a_{akhir}}$$

Dalam bentuk diskrit, nilai awal dan syarat batas menjadi

Nilai awal

$$T_{s_{i,0}} = T_{s_0}$$

$$X_{i,0} = X_0$$

Syarat Batas

$$Y_{0,j} = Y_{akhir}$$

$$T_{a_{0,j}} = T_{a_{akhir}}$$

4.2 Penyelesaian Numerik Model Pengeringan Suhu Rendah

Untuk menyelesaikan model pengeringan suhu rendah, diperlukan langkah-langkah sebagai berikut

1. Mendiskritisasi sistem persamaan menggunakan pendekatan metode beda hingga. Dalam hal ini digunakan beda maju untuk sumbu t , dan beda tengah untuk sumbu z
2. Membentuk Sistem Persamaan linear (SPL), yaitu dengan cara memasukkan nilai i dan j ke dalam persamaan yang telah didiskritkan. Dengan i dan j masing-masing adalah indeks penentuan nilai diskrit dari z dan t
3. Memasukkan nilai awal dan syarat batas
4. Membuat matriks tridiagonal dari SPL

Sebelum mendiskritkan sistem persamaan menggunakan beda hingga, terlebih dahulu sistem persamaan disederhanakan agar penyelesaiannya lebih mudah. Untuk menyederhanakan sistem persamaan, persamaan kedua, yaitu $-G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a = 0$, disubstitusikan ke persamaan ketiga. Dengan $-G_a \frac{\partial Y}{\partial z} + n_w a = 0 \equiv -G_a \frac{\partial Y}{\partial z} = -n_w a$, diperoleh

$$\begin{aligned}\rho_{bo} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} &= -G_a \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) L_g - G_a \left(C_{pa} \frac{\partial T_a}{\partial z} \right) \\ &= -n_w a L_g - G_a \left(C_{pa} \frac{\partial T_a}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Setelah disederhanakan, sistem persamaan menjadi

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{n_w a}{\rho_{bo}} \\ \rho_{bo} C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = -n_w a L_g - G_a \left(C_{pa} \frac{\partial T_a}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan model pengeringan suhu rendah menggunakan metode numerik.

4.2.1 Metode Beda Hingga Skema Implisit

Metode beda hingga skema implisit, mempunyai syarat $T_{a_{i+1,j+1}} = T_{s_{i,j+1}}$. Diskritisasi sistem persamaan menggunakan skema implisit adalah

$$\begin{cases} \rho_{bo} \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{wi,j+1} a \\ \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}}{\Delta t} \right) = -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{a_{i+1,j+1}} - T_{a_{i,j+1}}}{\Delta z} \right) - a L_g n_{wi,j+1} \end{cases}$$

Dengan memasukkan syarat $T_{a_{i+1,j+1}} = T_{s_{i,j+1}}$, didapatkan

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{bo} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j+1}} a \\ \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}}{\Delta t} \right) = -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i-1,j+1}}}{\Delta z} \right) - a L_g n_{w_{i,j+1}} \end{array} \right.$$

Tahap selanjutnya yaitu memasukkan nilai i dan j .
Diberikan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$. Untuk $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$ Persamaan $\rho_{bo} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j+1}} a$ menjadi

$$\begin{aligned} \rho_{bo} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) &= -n_{w_{i,j+1}} a \\ \frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} &= \frac{-n_{w_{i,j+1}} a}{\rho_{bo}} \\ X_{i,j+1} - X_{i,j} &= \frac{-\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{i,j+1}} a \\ X_{i,j+1} &= X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{i,j+1}} a \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 1$

$$X_{1,2} = X_{1,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{1,2}} a$$

$j = 2$

$$X_{1,3} = X_{1,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{1,3}} a$$

$j = 3$

$$X_{1,3} = X_{1,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{1,4}} a$$

\vdots

$j = N$

$$X_{1,N} = X_{1,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{1,N}} a$$

Untuk $i = 2, j = 1$

$$\begin{aligned}
& X_{2,2} = X_{2,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{2,2}} a \\
j = 2 \\
& X_{2,3} = X_{2,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{2,3}} a \\
j = 3 \\
& X_{2,4} = X_{2,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{2,4}} a \\
& \vdots \\
& j = N \\
& X_{2,N} = X_{2,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{2,N}} a
\end{aligned}$$

Untuk $i = 3j = 1$

$$\begin{aligned}
& X_{3,2} = X_{3,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{3,2}} a \\
j = 2 \\
& X_{3,3} = X_{3,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{3,3}} a \\
j = 3 \\
& X_{3,4} = X_{3,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{3,4}} a \\
& \vdots \\
& j = N \\
& X_{3,N} = X_{3,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{3,N}} a
\end{aligned}$$

Untuk $i = N - 1j = 1$

$$X_{N-1,2} = X_{N-1,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N-1,2}} a$$

Untuk $i = N - 1j = 2$

$$X_{N-1,3} = X_{N-1,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N-1,3}} a$$

$i = N - 1j = 3$

$$X_{N-1,4} = X_{N-1,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N-1,4}} a$$

⋮

$$i = N - 1, j = N - 1$$

$$X_{N-1,N} = X_{N-1,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N-1,N}} a$$

$$j = N$$

$$X_{N-1,N+1} = X_{N-1,N} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N-1,N+1}} a$$

Untuk $i = N, j = 1$

$$X_{N,2} = X_{N,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N,2}} a$$

$$j = 2$$

$$X_{N,3} = X_{N,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N,3}} a$$

$$j = 3$$

$$X_{N,4} = X_{N,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N,4}} a$$

⋮

$$i = N, j = N - 1$$

$$X_{N,N} = X_{N,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N,N}} a$$

$$i = N, j = N$$

$$X_{N,N+1} = X_{N,N} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{N,N+1}} a$$

Terlihat nilai $X_{i,j+1}$ dapat dihitung dari nilai $X_{i,j}$, oleh karena itu, untuk persamaan $\rho_{bo} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j+1}} a$ tidak perlu dibuat SPL dan matriks tridiagonalnya.

Dengan cara yang sama, dengan memasukkan nilai $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$, persamaan yang kedua menjadi

$$\begin{aligned}
\rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}}{\Delta t} \right) &= -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i-1,j+1}}}{\Delta z} \right) - a L_g n_{w_{i,j+1}} \\
\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i,j+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i,j}} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i,j+1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i-1,j+1}} &= -a L_g n_{w_{i,j+1}}
\end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan suku-suku $T_{s_{i,j+1}}$, $T_{s_{i,j}}$ dan $T_{s_{i-1,j+1}}$, diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} \right) T_{s_{i,j+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i-1,j+1}} &= -a L_g n_{w_{i,j+1}}
\end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 1$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} \right) T_{s_{1,2}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{0,2}} &= -a L_g n_{w_{1,2}}
\end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} \right) T_{s_{1,3}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{0,3}} &= -a L_g n_{w_{1,3}}
\end{aligned}$$

$j = 3$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} \right) T_{s_{1,4}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{0,4}} &= -a L_g n_{w_{1,4}}
\end{aligned}$$

\vdots

$j = N - 1$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} \right) T_{s_{1,N}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{0,N}} &= -a L_g n_{w_{1,N}}
\end{aligned}$$

$j = N$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,N+1}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,N+1}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,N+1}} \end{aligned}$$

Untuk $i = 2, j = 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,2}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,2}} \\ & = -aL_g n_{w_{2,2}} \end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,3}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,2}} \\ & = -aL_g n_{w_{2,3}} \end{aligned}$$

$j = 3$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,4}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,3}} \\ & = -aL_g n_{w_{2,4}} \end{aligned}$$

\vdots

$j = N - 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,N}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,N}} \\ & = -aL_g n_{w_{2,N}} \end{aligned}$$

$j = N$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,N+1}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,N+1}} \\ & = -aL_g n_{w_{2,N+1}} \end{aligned}$$

Untuk $i = 3, j = 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,2}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,2}} \\ & = -aL_g n_{w_{3,2}} \end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,3}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,3}} \\ & = -aL_g n_{w_{3,3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{aligned} & j = 3 \\ & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,4}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,4}} \\ & = -a L_g n_{w_{3,4}} \end{aligned} \\
& \vdots \\
& \begin{aligned} & j = N - 1 \\ & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,N}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,N}} \\ & = -a L_g n_{w_{3,N}} \end{aligned} \\
& \begin{aligned} & j = N \\ & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,N+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,N+1}} \\ & = -a L_g n_{w_{3,N+1}} \end{aligned} \\
& \vdots \\
& \text{Untuk } i = N, j = N \\
& \begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{N,N+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{N,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{N-1,N+1}} \\ & = -a L_g n_{w_{N,N+1}} \end{aligned}
\end{aligned}$$

Setelah memasukkan nilai $i = 1, 2, 3, \dots, N$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, N$, diperoleh Sistem Persamaan Linear (SPL) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,2}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,2}} \\ & = -a L_g n_{w_{1,2}} \end{aligned} \\
& \begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,3}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,3}} \\ & = -a L_g n_{w_{1,3}} \end{aligned} \\
& \begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) n_{w_{1,4}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,4}} \\ & = -a L_g n_{w_{1,4}} \end{aligned} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,N}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,N}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{1,N}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,N+1}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{1,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,N+1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{1,N+1}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,2}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,2}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,3}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,3}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,4}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,4}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,4}} \\
& \quad \vdots \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,N}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,N}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,N}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{2,N+1}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{2,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{1,N+1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,N+1}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,2}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,2}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,3}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,3}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,4}} - \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,4}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,4}} \\
& \quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,N}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,N}} \\
& \quad = -a L_g n_{w_{3,N}} \\
& \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{3,N+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{2,N+1}} \\
& \quad = -a L_g n_{w_{3,N+1}} \\
& \quad \vdots \\
& \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{N,N+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{N,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{N-1,N+1}} \\
& \quad = -a L_g n_{w_{N,N+1}}
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan nilai awal dan syarat batas, didapatkan matriks tridiagonal untuk SPL di atas

$$\mathbf{A} T_{s_{i,j}} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix}
-\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & \dots & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\
& & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \left(\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & & \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \\
& & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{s_{1,2}} \\
T_{s_{1,3}} \\
T_{s_{1,4}} \\
\vdots \\
T_{s_{1,N}} \\
T_{s_{1,N+1}} \\
T_{s_{2,2}} \\
T_{s_{2,3}} \\
T_{s_{2,4}} \\
\vdots \\
T_{s_{2,N}} \\
T_{s_{2,N+1}} \\
T_{s_{3,2}} \\
T_{s_{3,3}} \\
T_{s_{3,4}} \\
\vdots \\
T_{s_{3,N}} \\
T_{s_{3,N+1}}
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ -aL_g n_{w_{1,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{1,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ -aL_g n_{w_{2,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ -aL_g n_{w_{3,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,N+1}} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks tridiagonal, nilai $T_{s_{i,j}}$ dapat dicari, yaitu $\mathbf{T}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ -aL_g n_{w_{1,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{1,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ -aL_g n_{w_{2,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ -aL_g n_{w_{3,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,N+1}} \end{bmatrix}$$

4.2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

Metode beda hingga skema implisit, mempunyai syarat $T_{a_{i+1,j}} = T_{s_{i,j}}$. Diskritisasi sistem persamaan menggunakan skema implisit adalah

$$\begin{cases} \rho_{b0} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j}} a \\ \rho_{b0} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}}{\Delta t} \right) = -aL_g n_{w_{i,j}} - G_a C_{pa} \left(\frac{T_{a_{i+1,j}} - T_{a_{i,j}}}{\Delta z} \right) \end{cases}$$

Dengan memasukkan syarat $T_{a_{i+1,j}} = T_{s_{i,j}}$, diperoleh

$$\begin{cases} \rho_{b0} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j}} a \\ \rho_{b0} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}}{\Delta t} \right) = -aL_g n_{w_{i,j}} - G_a C_{pa} \left(\frac{T_{s_{i,j}} - T_{s_{i-1,j}}}{\Delta z} \right) \end{cases}$$

Tahap selanjutnya yaitu memasukkan nilai i dan j .

Diberikan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$. Untuk $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$ Persamaan $\rho_{b0} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{wi,j} a$ menjadi

$$\begin{aligned} \rho_{b0} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) &= -n_{wi,j} a \\ X_{i,j+1} - X_{i,j} &= \frac{-\Delta t}{\rho_{b0}} (n_{wi,j} a) \\ X_{i,j+1} &= X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} (n_{wi,j} a) \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 1$

$$X_{1,2} = X_{1,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w1,1} a$$

$j = 2$

$$X_{1,3} = X_{1,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w1,2} a$$

$j = 3$

$$X_{1,3} = X_{1,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w1,3} a$$

$j = N - 1$

$$X_{1,N} = X_{1,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w1,N-1} a$$

$j = N$

$$X_{1,N+1} = X_{1,N} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w1,N} a$$

Untuk $i = 2, j = 1$

$$X_{2,2} = X_{2,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w2,1} a$$

$j = 2$

$$X_{2,3} = X_{2,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w2,2} a$$

$j = 3$

$$X_{2,4} = X_{2,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w2,3} a$$

$$j = N - 1$$

$$X_{2,N} = X_{2,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{2,N-1}} a$$

$$j = N$$

$$X_{2,N+1} = X_{2,N} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{2,N}} a$$

Untuk $i = 3j = 1$

$$X_{3,2} = X_{3,1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{3,1}} a$$

$$j = 2$$

$$X_{3,3} = X_{3,2} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{3,2}} a$$

$$j = 3$$

$$X_{3,4} = X_{3,3} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{3,3}} a$$

$$j = N - 1$$

$$X_{3,N} = X_{3,N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{3,N-1}} a$$

$$j = N$$

$$X_{3,N+1} = X_{3,N} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{3,N}} a$$

Terlihat nilai $X_{i,j+1}$ dapat dihitung dari nilai $X_{i,j}$, oleh karena itu, untuk persamaan $\rho_{b0} \left(\frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\Delta t} \right) = -n_{w_{i,j}} a$ tidak perlu dibuat SPL dan matriks tridiagonalnya. $= -aL_g n_{w_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i,j}} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i-1,j}}$

Dengan cara yang sama, dengan memasukkan nilai $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$, persamaan yang kedua menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} (T_{s_{i,j+1}} - T_{s_{i,j}}) &= -aL_g n_{w_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} (T_{s_{i,j}} - T_{s_{i-1,j}}) \\ \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i,j+1}} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i,j}} &= -aL_g n_{w_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} T_{s_{i,j}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{i,j+1}} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{i,j}} + \frac{\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{i-1,j}}}{\Delta Z}T_{s_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{i-1,j}} \\ & = -aL_g n_{wi,j} \end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan suku-suku $T_{s_{i,j+1}}$, $T_{s_{i,j}}$ dan $T_{s_{i-1,j}}$, diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{i,j+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{i,j}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{i-1,j}} \\ & = -aL_g n_{wi,j} \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,1}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,1}} \end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,2}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,2}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,2}} \end{aligned}$$

$j = 3$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,3}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,3}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,3}} \end{aligned}$$

\vdots

$j = N - 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,N-1}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,N-1}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,N-1}} \end{aligned}$$

$j = N$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) T_{s_{1,N}} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} T_{s_{0,N}} \\ & = -aL_g n_{w_{1,N}} \end{aligned}$$

Untuk $i = 2, j = 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,1}} \\
j = 2 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,2}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,2}} \\
j = 3 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,3}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,3}} \\
& \vdots \\
j = N - 1 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,N-1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,N-1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,N-1}} \\
j = N \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,N}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{2,N}} \\
\text{Untuk } i = 3, j = 1 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,1}} \\
j = 2 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,2}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,2}} \\
j = 3 \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,3}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w_{3,3}}
\end{aligned}$$

⋮

$$j = N - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,N-1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,N-1}} \\ = -aL_g n_{w_{3,N-1}} \end{aligned}$$

$$j = N$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,N}} \\ = -aL_g n_{w_{3,N}} \end{aligned}$$

⋮

Untuk $i = N, j = N$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{N,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{N,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{N-1,N}} \\ = -aL_g n_{w_{N,N}} \end{aligned}$$

Setelah memasukkan nilai $i = 1, 2, 3, \dots, N$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, N$, diperoleh Sistem Persamaan Linear (SPL) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{1,1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{0,1}} \\ = -aL_g n_{w_{1,1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{1,2}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{0,2}} \\ = -aL_g n_{w_{1,2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{1,3}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{0,3}} \\ = -aL_g n_{w_{1,3}} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{1,N-1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{0,N-1}} \\ = -aL_g n_{w_{1,N-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{1,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{1,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{0,N}} \\ = -aL_g n_{w_{1,N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w2,1} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,2}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w2,2} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,3}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w2,3} \\
& \vdots \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,N-1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,N-1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w2,N-1} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{2,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{2,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{1,N}} \\
& \quad = -aL_g n_{w2,N} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,2}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w3,1} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,3}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,2}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,2}} \\
& \quad = -aL_g n_{w3,2} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,4}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,3}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,3}} \\
& \quad = -aL_g n_{w3,3} \\
& \vdots \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,N}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,N-1}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,N-1}} \\
& \quad = -aL_g n_{w3,N-1} \\
& \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{3,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}\right)T_{s_{3,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta Z}T_{s_{2,N}} \\
& \quad = -aL_g n_{w3,N} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{N,N+1}} - \left(\frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right)T_{s_{N,N}} - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z}T_{s_{N-1,N}} \\ = -aL_g n_{w_{N,N}} \end{aligned}$$

Dengan memasukkan nilai awal dan syarat batas, didapatkan matriks tridiagonal untuk SPL di atas $\mathbf{CT}_{s_{ij}} = \mathbf{D}$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0}C_{ps}}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s_{1,1}} \\ T_{s_{1,2}} \\ T_{s_{1,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{1,N-1}} \\ T_{s_{1,N}} \\ T_{s_{2,1}} \\ T_{s_{2,2}} \\ T_{s_{2,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{2,N-1}} \\ T_{s_{2,N}} \\ T_{s_{3,1}} \\ T_{s_{3,2}} \\ T_{s_{3,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{3,N-1}} \\ T_{s_{3,N}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,1}} \\ -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks tridiagonal, nilai $T_{S_{i,j}}$ dapat dicari, yaitu $\mathbf{T}_s = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$, dengan

$$C = \begin{bmatrix} \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) \end{bmatrix}$$

dan

$$D = \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,1}} \\ -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Method of Lines (MOL)

Method of Lines (MOL), mempunyai syarat $T_{a_{i+1}} = T_{s_i}$. Diskritisasi sistem persamaan menggunakan MOL adalah

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{b0} \left(\frac{dX_i}{dt} \right) = -n_{w_i} a \\ \rho_{b0} C_{ps} \frac{dT_{s_i}}{dt} = -a L_g n_{w_i} - G_a C_{ps} \left(\frac{T_{a_{i+1}} - T_{a_i}}{\Delta z} \right) \end{array} \right.$$

Dengan memasukkan syarat $T_{a_{i+1,j}} = T_{s_{i,j}}$, diperoleh

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{b0} \left(\frac{dX_i}{dt} \right) = -n_{w_i} a \\ \rho_{b0} C_{ps} \frac{dT_{s_i}}{dt} = -a L_g n_w - G_a C_{ps} \left(\frac{T_{s_i} - T_{s_{i-1}}}{\Delta z} \right) \end{array} \right.$$

Seperti yang telah diuraikan di BAB II, diskritisasi PDP menggunakan MOL, menghasilkan sebanyak N Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Jika diberikan $i = 1, 2, \dots, N$, maka sistem persamaan mempunyai penyelesaian numerik sebanyak N . Sesuai dengan uraian di BAB II, penyelesaian model pengeringan suhu rendah menggunakan MOL adalah sebagai berikut. Untuk persamaan pertama yaitu

$$\frac{dX_i}{dt} = X_{t_i} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t}$$

Diperoleh

$$\rho_{b0} \frac{dX_i}{dt} = -n_{w_i} a$$

$$\frac{dX_i}{dt} = X_{t_i} = - \frac{n_{w_i} a}{\rho_{b0}}$$

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} = - \frac{n_{w_i} a}{\rho_{b0}}$$

$$X_{i+1} = X_i - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_i} a$$

Tahap selanjutnya yaitu memasukkan nilai $i = 1, 2, \dots, N$. Sehingga didapatkan

Untuk $i = 1$,

$$X_2 = X_1 - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_1} a$$

$i = 2$,

$$X_3 = X_2 - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_2} a$$

$i = 3$,

$$X_4 = X_3 - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_3} a$$

\vdots

$i = N - 1$

$$X_N = X_{N-1} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_{N-1}} a$$

$i = N$

$$X_{N+1} = X_N - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} n_{w_N} a$$

Dengan cara yang sama, untuk menyelesaikan persamaan kedua

$$\rho_{bo} C_{ps} \frac{dT_{s_i}}{dt} = -aL_g n_{w_i} - G_a C_{ps} \left(\frac{T_{s_i} - T_{s_{i-1}}}{\Delta z} \right)$$

dimana

$$\frac{dT_{s_i}}{dt} = \frac{T_{s_{i+1}} - T_{s_i}}{\Delta t}$$

didapatkan

$$\begin{aligned} \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s_{i+1}} - T_{s_i}}{\Delta t} \right) &= -aL_g n_{w_i} - G_a C_{ps} \left(\frac{T_{s_i} - T_{s_{i-1}}}{\Delta z} \right) \\ \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{i+1}} - \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} T_{s_i} &= -aL_g n_{w_i} - \frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} T_{s_i} \\ &\quad + \frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} T_{s_{i-1}} \end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan suku-suku $T_{s_{i+1}}$, T_{s_i} dan $T_{s_{i-1}}$, diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{i+1}} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_i} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_{i-1}} \\ = -aL_g n_{w_i} \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_2} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_1} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_0} \\ = -aL_g n_{w_1} \end{aligned}$$

$i = 2$

$$\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_3} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_2} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_1} = -aL_g n_{w_2}$$

$i = 3$

$$\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_4} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_3} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_2} = -aL_g n_{w_3}$$

\vdots

$i = N - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_N} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_{N-1}} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_{N-2}} \\ = -aL_g n_{w_{N-1}} \end{aligned}$$

$i = N$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{N+1}} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_N} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_{N-1}} \\ = -aL_g n_{w_N} \end{aligned}$$

Didapatkan SPL untuk $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_2} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_1} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_0} &= -aL_g n_{w_1} \\ \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_3} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_2} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_1} &= -aL_g n_{w_2} \\ \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_4} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_3} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_2} &= -aL_g n_{w_3} \\ \vdots & \\ \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_N} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}\right)T_{s_{N-1}} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta Z}T_{s_{N-2}} \\ &= -aL_g n_{w_{N-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}T_{s_{N+1}} - \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta z}\right)T_{s_N} - \frac{G_aC_{ps}}{\Delta z}T_{s_{N-1}} \\ = -aL_g n_{w_N} \end{aligned}$$

Didapatkan matriks tridiagonal untuk SPL di atas

$$\begin{aligned} \mathbf{ET}_{s_i} &= \mathbf{F} \\ \begin{bmatrix} -\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_aC_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s_0} \\ T_{s_1} \\ T_{s_2} \\ T_{s_3} \\ T_{s_4} \\ \vdots \\ T_{s_{N-1}} \\ T_{s_N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_1} \\ -aL_g n_{w_2} \\ -aL_g n_{w_3} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{N-1}} \\ -aL_g n_{w_N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Setelah diperoleh matriks tridiagonal, nilai $T_{s_{i,j}}$ dapat dicari, yaitu

$\mathbf{T}_s = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}$, dengan

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

dan

$$F = \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_1} \\ -aL_g n_{w_2} \\ -aL_g n_{w_3} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{N-1}} \\ -aL_g n_{w_N} \end{bmatrix}$$

4.3 Simulasi Numerik

Untuk mensimulasikan hasil yang didapatkan dari sub bab sebelumnya, terlebih dahulu dihitung nilai-nilai parameter yang digunakan sebagai nilai *input* di dalam MATLAB. Berikut adalah nilai parameter yang sudah diketahui.

Tabel 4.1 Parameter dan nilainya

Parameter	Nilai
a	1132
G_a	0,03
rh_a	0,6
X_0	0,2
Y	0,0088
T_a	20

ρ_{s0}	730
ρ_{hb}	750
ε	0,5
C_{pss}	1465
C_{pw}	3560
C_{pas}	1008
C_{pv}	1883

Selanjutnya akan dihitung nilai ρ_{b0} . Diberikan persamaan

$$\begin{aligned}
 \rho_{b0} &= \frac{\rho_{hb}}{1 + X_0} \\
 &= \frac{750}{1 + 0,2} \\
 &= \frac{750}{1,2} \\
 &= 3750
 \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai X_e , dimana

$$\begin{aligned}
 X_e &= -\frac{1}{100C_3} \ln \left(-\frac{\ln(rh_a)(T_a + C_2)}{C_1} \right) \\
 X_e &= -\frac{1}{100(0,1807)} \ln \left(-\frac{\ln(0,6)(20 + 56,98)}{486,1} \right) \\
 X_e &= 0.139158
 \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah menghitung nilai eksak X , dimana

$$X = (X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} + X_e$$

K dan N adalah parameter, yang nilainya

$$\begin{aligned}
 K &= -0,0347 + 0,00287 \left(\frac{9T_a}{5} + 32 \right) \\
 &= -0,0347 + 0,00287 \left(\frac{9(20)}{5} + 32 \right) \\
 &= -00347 + 0,00287(68)
 \end{aligned}$$

$$= -00347 + 0.19516$$

$$= 0.19169$$

$$N = 0,54 + 0.00324rh_a$$

$$= 0,54 + 0.00324(0,6)$$

$$= 0,54 + 0.001944$$

$$= 0.541944$$

Perhitungan nilai $n_{w,i,j}$ tergantung dengan perubahan nilai t di setiap interval waktu. Dimana

$$t = j\Delta t$$

dan

$$z = i\Delta z$$

$$n_w = \frac{\rho_{s0}}{a_p} KN(X - X_e)t^{N-1}$$

Dengan menggunakan nilai a , dihitung nilai a_p .

$$a = a_p(1 - \varepsilon)$$

$$1132 = a_p(1 - 0,5)$$

$$1132 = 0,5a_p$$

$$a_p = 2264 \text{ m}^2\text{m}^{-3}$$

Karena nilai $n_{w,i,j}$ hanya tergantung dengan perubahan nilai j maka untuk $i = 1, 2, \dots, m$ adalah sama. Dengan kata lain

$$n_{w1,1} = n_{w2,1} = n_{wm-1,j} = n_{wm,j}$$

Diberikan $i, j = 1, 2, 3$. Nilai $n_{w,i,j}$ di setiap interval waktu, disajikan dalam tabel berikut

Tabel 4.2 Nilai $n_{w,i,j}$ untuk $\Delta t = 0,5$

j	Δt	t	$n_{w,i,j}$
1	0,5	0,5	0.002454
2		1	0.001682
3		1,5	0.001333
4		2	0.001122

Untuk $\Delta t = 0,5$, diperoleh

$$n_{w1,1} = n_{w2,1} = n_{w3,1} = 0,002454$$

$$n_{w1,2} = n_{w2,2} = n_{w3,2} = 0,001682$$

$$n_{w1,3} = n_{w2,3} = n_{w3,3} = 0,001333$$

$$n_{w1,4} = n_{w2,4} = n_{w3,4} = 0,001122$$

Tabel 4.3 Nilai $n_{wi,j}$ untuk $\Delta t = 0,25$

j	Δt	t	$n_{wi,j}$
1	0,25	0,25	0.003513
2		0,5	0.002454
3		0,75	0.001973
4		1	0.001682

Untuk $\Delta t = 0,25$, diperoleh

$$n_{w1,1} = n_{w2,1} = n_{w3,1} = 0,003513$$

$$n_{w1,2} = n_{w2,2} = n_{w3,2} = 0,002454$$

$$n_{w1,3} = n_{w2,3} = n_{w3,3} = 0,001973$$

$$n_{w1,4} = n_{w2,4} = n_{w3,4} = 0,001682$$

Tabel 4.4 Nilai $n_{wi,j}$ untuk $\Delta t = 0,125$

j	Δt	t	$n_{wi,j}$
1	0,125	0,125	0.004964
2		0,25	0.003513
3		0,375	0.002853
4		0,5	0.002454

Untuk $\Delta t = 0,125$, diperoleh

$$n_{w1,1} = n_{w2,1} = n_{w3,1} = 0,004964$$

$$n_{w1,2} = n_{w2,2} = n_{w3,2} = 0,003513$$

$$n_{w1,3} = n_{w2,3} = n_{w3,3} = 0,002853$$

$$n_{w1,4} = n_{w2,4} = n_{w3,4} = 0,002454$$

Nilai C_{ps} bergantung dengan nilai X di setiap interval waktu, dimana

$$X = (X_0 - X_e)e^{(-Kt^N)} + X_e$$

Dan

$$C_{ps} = C_{pss} + C_{pw}X$$

$$C_{pss} = 1465$$

$$C_{pw} = 3560$$

Nilai C_{ps} di tiap-tiap interval waktu adalah sebagai berikut

Tabel 4.5 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,5$

Δt	j	t	X	C_{ps}
0,5	1	0,5	0.192494	2150.28
	2	1	0.189386	2139,22
	3	1,5	0.187075	2130,99

Tabel 4.6 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,25$

Δt	j	t	X	C_{ps}
0,25	1	0,25	0.194739	2158,27
	2	0,5	0.192494	2150.28
	3	0,75	0.190796	2144,23

Tabel 4.7 Nilai C_{ps} untuk $\Delta t = 0,125$

Δt	j	t	X	C_{ps}
0,125	1	0,125	0.196335	2163,96
	2	0,25	0.194739	2158,27
	3	0,375	0.193517	2153,92

untuk menghitung nilai C_{pa} digunakan persamaan

$$C_{pa} = C_{pas} + C_{pv}Y$$

Dengan

$$C_{pas} = 1008$$

$$C_{pv} = 1883$$

Diperoleh nilai $C_{pa} = 1008 + 1883(0,088)$

$$\begin{aligned}
 &= 1008 + 165.704 \\
 &= 1173.704
 \end{aligned}$$

Menghitung nilai L_g menggunakan persamaan

$$\begin{aligned}
 L_g &= 2,503 \times 10^6 - 2,386 \times 10^3 (T_a - 273,16) \\
 &= 2,503 \times 10^6 - 2,386 \times 10^3 (20 - 273,16) \\
 &= 2,503 \times 10^6 - 2,386 \times 10^3 (-253,16) \\
 &= 2,503 \times 10^6 + 2,386 \times 10^3 (253,16) \\
 &= 2,503 \times 10^6 + 2,386 \times 10^3 (253,16) \\
 &= 3,10703976 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}
 \end{aligned}$$

Setelah menghitung nilai parameter, selanjutnya adalah membentuk grid berdasarkan nilai Δz dan Δt yang diberikan.

Diberikan

$$\Delta z_1 = 0.12, \Delta t_1 = 0.5$$

$$\Delta z_2 = 0.06, \Delta t_2 = 0.25$$

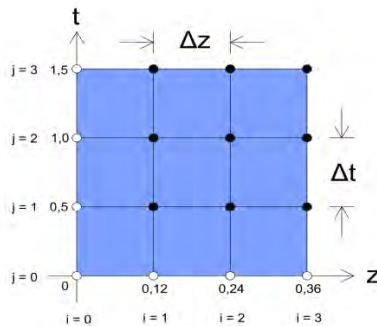
$$\Delta z_3 = 0.03, \Delta t_3 = 0.125$$

Dengan

$$z = 0.36 \text{ (meter)}$$

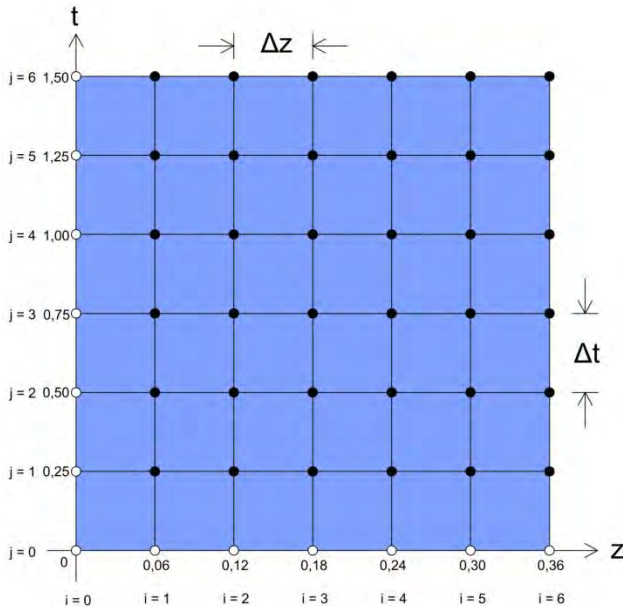
$$t = 1.5 \text{ (jam)}$$

Berikut adalah grid untuk masing-masing nilai Δz dan Δt .



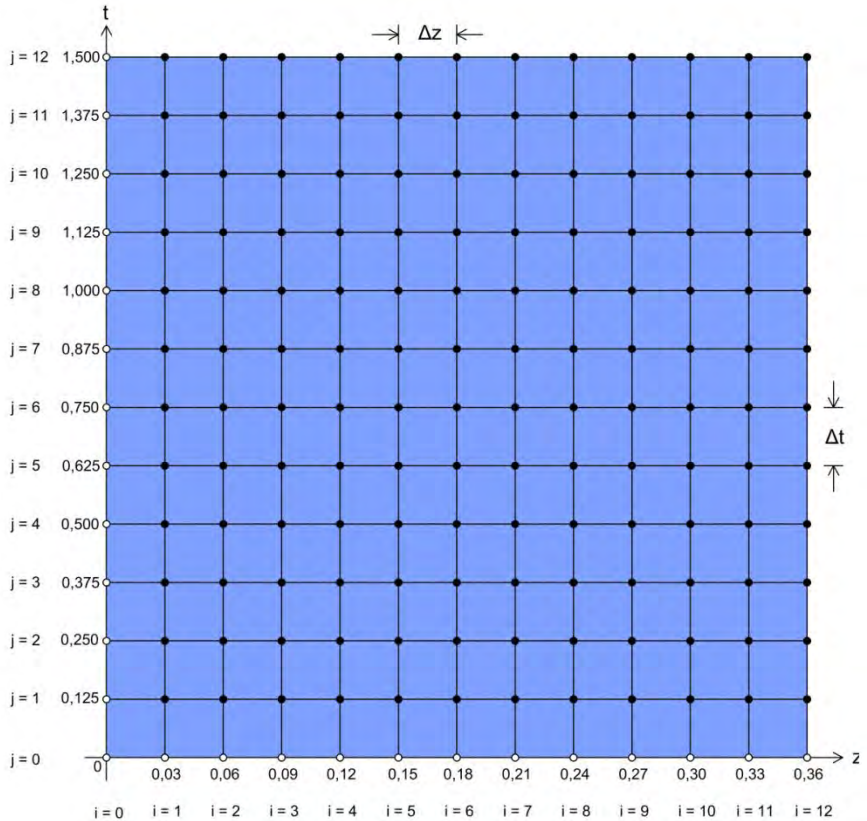
Gambar 4.1 Grid untuk $\Delta z = 0.12, \Delta t = 0.5$

Untuk $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$, terdapat 16 titik yang dihitung. Dengan nilai awal dan syarat batas yang ditentukan, titik yang dihitung berjumlah 9 titik. Nilai $i = 0,1,2,3$ dan $j = 0,1,2,3$.



Gambar 4.2 Grid untuk $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$

Untuk $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$, terdapat 49 titik yang dihitung. Dengan nilai awal dan syarat batas yang ditentukan, titik yang dihitung berjumlah 36 titik. Dengan $i = 0,1,2,3, \dots 9$ dan $j = 0,1,2,3, \dots 9$.



Gambar 4.3 Grid untuk $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$

Untuk $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$, terdapat 169 titik yang dihitung. Dengan nilai awal dan syarat batas yang ditentukan, titik yang dihitung berjumlah 144 titik. Dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 12$ dan $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 12$.

Hasil simulasi menggunakan MATLAB, nilai kadar kelembaban biji X di setiap Δz dan Δt yang diberikan adalah sebagai berikut

Tabel 4.8 Nilai X Analitik dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$

	kadar kelembaban biji (X)		
	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 2$ $z = 0.24$	$i = 3$ $t = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.5$	0.19365	0.19098	0.18898
$j = 2$ $t = 1$	0.19365	0.19219	0.19098
$j = 3$ $t = 1.5$	0.19365	0.19288	0.19219

Tabel 4.9 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Implisit dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$

	kadar kelembaban biji (X)		
	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 2$ $z = 0.24$	$i = 3$ $t = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.5$	0.19365	0.19343	0.19326
$j = 2$ $t = 1$	0.19365	0.19352	0.19341
$j = 3$ $t = 1.5$	0.19365	0.19358	0.19352

Tabel 4.10 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$

	kadar kelembaban biji (X)		
	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 2$ $z = 0.24$	$i = 3$ $t = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.5$	0.19365	0.19333	0.19311
$j = 2$ $t = 1$	0.19365	0.19349	0.19336
$j = 3$ $t = 1.5$	0.19365	0.19357	0.1935

Tabel 4.11 Nilai X menggunakan MOL dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$

	kadar kelembaban biji (X)
$i = 1$ $t = 0.5$	0.19365
$i = 2$ $t = 1$	0.19328
$i = 3$ $t = 1.5$	0.19301

Tabel 4.12 Nilai X Analitik dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$

	kadar kelembaban biji (X)					
	$i = 1$ $z = 0.06$	$i = 2$ $z = 0.12$	$i = 3$ $z = 0.18$	$i = 4$ $z = 0.24$	$i = 5$ $z = 0.30$	$i = 6$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.25$	0.19364	0.19364	0.19364	0.19364	0.19364	0.19364
$j = 2$ $t = 0.5$	0.19098	0.19219	0.19288	0.18898	0.19098	0.19219
$j = 3$ $t = 0.75$	0.18992	0.19156	0.18898	0.19098	0.19044	0.18992
$j = 4$ $t = 1$	0.18944	0.18898	0.19098	0.19044	0.18992	0.19364
$j = 5$ $t = 1.25$	0.19364	0.19156	0.19098	0.19044	0.18992	0.18898
$j = 6$ $t = 1.5$	0.18992	0.19156	0.18898	0.19098	0.19044	0.18992

Tabel 4.13 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Implisit dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$

	kadar kelembaban biji (X)					
	$i = 1$ $z = 0.06$	$i = 2$ $z = 0.12$	$i = 3$ $z = 0.18$	$i = 4$ $z = 0.24$	$i = 5$ $z = 0.30$	$i = 6$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.25$	0.19343	0.19365	0.19352	0.19358	0.19326	0.19341
$j = 2$ $t = 0.5$	0.19352	0.19332	0.19346	0.19323	0.1934	0.19335
$j = 3$ $t = 0.75$	0.1933	0.19326	0.19321	0.1934	0.19341	0.19326
$j = 4$ $t = 0.1$	0.19365	0.19346	0.19323	0.1934	0.19341	0.19326
$j = 5$	0.19352	0.19326	0.1934	0.19323	0.19341	0.19335

$t = 1.25$						
$j = 6$ $t = 1.5$	0.19365	0.19346	0.1934	0.19341	0.19323	0.19326

Tabel 4.14 Nilai X menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$

	kadar kelembaban biji (X)					
	$i = 1$ $z = 0.06$	$i = 2$ $z = 0.12$	$i = 3$ $z = 0.18$	$i = 4$ $z = 0.24$	$i = 5$ $z = 0.30$	$i = 6$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.25$	0.19365	0.19365	0.19365	0.19333	0.19349	0.19357
$j = 2$ $t = 0.5$	0.19333	0.19349	0.19357	0.19311	0.19336	0.1935
$j = 3$ $t = 0.75$	0.19344	0.19325	0.19316	0.19338	0.19332	0.19327
$j = 4$ $t = 1.0$	0.19325	0.19322	0.19318	0.19338	0.19316	0.19325
$j = 5$ $t = 1.25$	0.19325	0.19318	0.19338	0.19316	0.19325	0.19322
$j = 6$ $t = 1.5$	0.19318	0.19322	0.19316	0.19325	0.19323	0.19325

Tabel 4.15 Nilai X menggunakan MOL dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$

	Kadar Kelembaban Biji (X)
$i = 1$ $t = 0.25$	0.19365
$i = 2$ $t = 0.5$	0.19354
$i = 3$ $t = 0.75$	0.19339
$i = 4$ $t = 1.0$	0.19333
$i = 5$ $t = 1.25$	0.19325
$i = 6$ $t = 1.5$	0.1911

Tabel 4.16 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ Analitik

	j											
	$j = 1$ $t = 0.125$	$j = 2$ $t = 0.25$	$j = 3$ $t = 0.375$	$j = 4$ $t = 0.5$	$j = 5$ $t = 0.625$	$j = 6$ $t = 0.75$	$j = 7$ $t = 0.875$	$j = 8$ $t = 1$	$j = 9$ $t = 1.125$	$j = 10$ $t = 1.25$	$j = 11$ $t = 1.375$	$j = 12$ $t = 1.5$
X	0.19365	0.19288	0.19219	0.19156	0.19098	0.19044	0.18944	0.18898	0.18898	0.18732	0.18659	0.18525

Tabel 4.17 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit

	Kadar Kelembaban											
	$i = 1$ $z = 0.03$	$i = 2$ $z = 0.06$	$i = 3$ $z = 0.09$	$i = 4$ $z = 0.12$	$i = 5$ $z = 0.15$	$i = 6$ $z = 0.18$	$i = 7$ $z = 0.21$	$i = 8$ $z = 0.24$	$i = 9$ $z = 0.27$	$i = 10$ $z = 0.3$	$i = 11$ $z = 0.33$	$i = 12$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.125$	0.19286	0.19283	0.19277	0.19274	0.19271	0.19266	0.19261	0.19257	0.19252	0.19248	0.19306	0.19302
$j = 2$ $t = 0.25$	0.19306	0.19302	0.19299	0.19295	0.19292	0.19289	0.19271	0.19266	0.19261	0.19257	0.19252	0.19248
$j = 3$ $t = 0.375$	0.19286	0.19283	0.1928	0.19277	0.19274	0.19271	0.19244	0.19311	0.19298	0.19286	0.19315	0.19323
$j = 4$ $t = 0.5$	0.19352	0.19346	0.1934	0.19335	0.19352	0.19341	0.19332	0.19323	0.19315	0.19343	0.19326	0.19311
$j = 5$ $t = 0.625$	0.1933	0.19326	0.19321	0.19317	0.19313	0.19309	0.19307	0.19301	0.19294	0.19288	0.19282	0.19277
$j = 6$ $t = 0.75$	0.19286	0.19283	0.1928	0.19277	0.19274	0.19271	0.19244	0.19257	0.19252	0.19248	0.19276	0.19266
$j = 7$ $t = 0.875$	0.19365	0.19358	0.19352	0.19343	0.19352	0.19341	0.19326	0.19311	0.19298	0.19286	0.19276	0.19266
$j = 8$ $t = 1$	0.1933	0.19326	0.19321	0.19317	0.19313	0.19309	0.19307	0.19301	0.19294	0.19288	0.19282	0.19277
$j = 9$ $t = 1.125$	0.19306	0.19302	0.19299	0.19295	0.19292	0.19289	0.19271	0.19266	0.19261	0.19257	0.19252	0.19248
$j = 10$ $t = 1.25$	0.19365	0.19358	0.19352	0.19346	0.1934	0.19335	0.19332	0.19323	0.19315	0.19326	0.19311	0.19298
$j = 11$ $t = 1.375$	0.19286	0.19283	0.1928	0.19277	0.19274	0.19271	0.19244	0.19261	0.19257	0.19252	0.19248	0.1925
$j = 12$ $t = 1.5$	0.19269	0.19266	0.19264	0.19261	0.19259	0.19256	0.19247	0.19245	0.19243	0.19241	0.1928	0.1925

Tabel 4.18 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit

	Kadar Kelembaban											
	$i = 2$ $z = 0.06$	$i = 2$ $z = 0.06$	$i = 3$ $z = 0.09$	$i = 4$ $z = 0.12$	$i = 5$ $z = 0.15$	$i = 6$ $z = 0.18$	$i = 7$ $z = 0.21$	$i = 8$ $z = 0.24$	$i = 9$ $z = 0.27$	$i = 10$ $z = 0.30$	$i = 11$ $z = 0.33$	$i = 12$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.125$	0.19365	0.19333	0.19311	0.19294	0.19279	0.19266	0.19365	0.19349	0.19336	0.19325	0.19316	0.19307
$j = 2$ $t = 0.25$	0.19365	0.19357	0.1935	0.19344	0.19338	0.19332	0.19254	0.19244	0.19234	0.19225	0.19217	0.19209
$j = 3$ $t = 0.375$	0.19254	0.19244	0.19234	0.19225	0.19223	0.19221	0.19219	0.19215	0.19212	0.19209	0.19204	0.192
$j = 4$ $t = 0.5$	0.19299	0.19292	0.19285	0.19278	0.19272	0.19266	0.19332	0.19327	0.19322	0.19318	0.19313	0.19309
$j = 5$ $t = 0.625$	0.19327	0.19322	0.19318	0.19313	0.19309	0.19305	0.19301	0.19298	0.19294	0.19291	0.19284	0.19281
$j = 6$ $t = 0.75$	0.19261	0.19255	0.1925	0.19245	0.19241	0.19236	0.19264	0.19261	0.19258	0.19256	0.19253	0.19251
$j = 7$ $t = 0.875$	0.19301	0.19298	0.19294	0.19291	0.19287	0.19284	0.19281	0.19278	0.19275	0.19272	0.19269	0.19266
$j = 8$ $t = 1$	0.19235	0.19232	0.19233	0.19231	0.19229	0.19227	0.19225	0.19223	0.19221	0.19219	0.19215	0.19212
$j = 9$ $t = 1.125$	0.19281	0.19278	0.19275	0.19272	0.19269	0.19266	0.19264	0.19261	0.19258	0.19256	0.19253	0.19251
$j = 10$ $t = 1.25$	0.19264	0.19261	0.19258	0.19256	0.19253	0.19251	0.19249	0.19249	0.19246	0.19244	0.19242	0.19237
$j = 11$ $t = 1.375$	0.19249	0.19246	0.19244	0.19242	0.19239	0.19237	0.19235	0.19233	0.19231	0.19229	0.19227	0.19225
$j = 12$ $t = 1.5$	0.19235	0.19316	0.19307	0.19299	0.19292	0.19285	0.19278	0.19272	0.19266	0.19254	0.19244	0.19234

Tabel 4.19 Nilai X dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan MOL

	j											
	$j = 1$ $t = 0.125$	$j = 2$ $t = 0.25$	$j = 3$ $t = 0.375$	$j = 4$ $t = 0.5$	$j = 5$ $t = 0.625$	$j = 6$ $t = 0.75$	$j = 7$ $t = 0.875$	$j = 8$ $t = 1$	$j = 9$ $t = 1.125$	$j = 10$ $t = 1.25$	$j = 11$ $t = 1.375$	$j = 12$ $t = 1.5$
X	1.9711	1.8916	1.8063	1.7137	1.6118	1.4976	1.4339	1.1426	1.3671	1.2967	1.2221	1.0573

Sedangkan nilai temperatur menggunakan metode beda hingga Implisit, Eksplisit dan MOL di masing-masing titik diberikan dalam tabel berikut

Tabel 4.20 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit

	Temperatur (T_s)		
	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 2$ $z = 0.24$	$i = 3$ $t = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.5$	1.0257	0.57134	0.25449
$j = 2$ $t = 1$	1.0257	0.57133	0.57133
$j = 3$ $t = 1.5$	1.0257	0.25449	0.25449

Tabel 4.21 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit

	Temperatur (T_s)		
	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 2$ $z = 0.24$	$i = 3$ $t = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.5$	1.0257	1.0257	1.0257
$j = 2$ $t = 1$	0.57135	0.57133	0.57133
$j = 3$ $t = 1.5$	0.25449	0.25449	0.25449

Tabel 4.22 Nilai temperatur (T_s) menggunakan MOL dengan $\Delta z = 0.12$, $\Delta t = 0.5$

	Temperatur (T_s)
$i = 1$ $t = 0.5$	0.64249
$i = 2$ $t = 1$	0.54783
$i = 3$ $t = 1.5$	0.4733

Tabel 4.23 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit

	Temperatur (T_s)					
	$i = 1$ $z = 0.06$	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 1$ $z = 0.18$	$i = 1$ $z = 0.24$	$i = 1$ $z = 0.30$	$i = 1$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.25$	0.83737	0.61039	0.42616	0.26778	0.12724	0.83736
$j = 1$ $t = 0.5$	0.61039	0.42615	0.26778	0.12724	0.83736	0.61039
$j = 1$ $t = 0.75$	0.42615	0.26778	0.12724	0.53119	0.63238	0.43909
$j = 1$ $t = 0.1$	0.35414	0.27496	0.13034	0.43909	0.35414	0.27496
$j = 1$ $t = 1.25$	0.27496	0.2006	0.35414	0.13034	0.27496	0.20061
$j = 1$ $t = 1.5$	0.13034	0.063622	0.43909	0.27496	0.63238	0.53118

Tabel 4.24 Nilai temperatur dengan (T_s) $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit

	Temperatur (T_s)					
	$i = 1$ $z = 0.06$	$i = 1$ $z = 0.12$	$i = 1$ $z = 0.18$	$i = 1$ $z = 0.24$	$i = 1$ $z = 0.30$	$i = 1$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.25$	0.83738	0.6104	0.42616	0.26778	0.12725	0.83736
$j = 1$ $t = 0.5$	0.61039	0.42615	0.26778	0.12724	0.83736	0.61039
$j = 1$ $t = 0.75$	0.42615	0.26778	0.12724	0.20061	0.13034	0.063622
$j = 1$ $t = 0.1$	0.53118	0.43909	0.35414	0.27496	0.2006	0.13034
$j = 1$ $t = 1.25$	0.43909	0.35414	0.27496	0.2006	0.13034	0.063622
$j = 1$ $t = 1.5$	0.42618	0.26779	0.12725	0.12724	0.13034	0.063621

Tabel 4.25 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.06$, $\Delta t = 0.25$ menggunakan MOL

	Temperatur (T_s)
$i = 1$ $t = 0.5$	1.9706
$i = 2$ $t = 1$	1.6115
$i = 3$ $t = 1.5$	1.4973
$i = 4$ $t = 0.5$	1.4336
$i = 5$ $t = 0.5$	1.3668
$i = 6$ $t = 0.5$	1.2219

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

Tabel 4.26 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Implisit

	Temperatur(T_s)											
	$i = 1$ $z = 0.03$	$i = 2$ $z = 0.06$	$i = 3$ $z = 0.09$	$i = 4$ $z = 0.12$	$i = 5$ $z = 0.15$	$i = 6$ $z = 0.18$	$i = 7$ $z = 0.21$	$i = 8$ $z = 0.24$	$i = 9$ $z = 0.27$	$i = 10$ $z = 0.3$	$i = 11$ $z = 0.33$	$i = 12$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.125$	0.973	0.85986	0.75893	0.66708	0.58234	0.50337	0.4292	0.35912	0.29258	0.22912	0.1684	0.11013
$j = 2$ $t = 0.25$	0.97298	0.85985	0.75891	0.66706	0.58233	0.50336	0.4292	0.35912	0.29258	0.22912	0.1683	0.054067
$j = 3$ $t = 0.375$	0.83356	0.64977	0.49178	0.64976	0.49178	0.4917	0.3516	0.22468	0.22912	0.29258	0.10813	0.11013
$j = 4$ $t = 0.5$	0.85986	0.75892	0.66707	0.58233	0.50336	0.4292	0.35912	0.29258	0.22912	0.1684	0.11013	0.054067
$j = 5$ $t = 0.625$	0.97298	0.85985	0.75891	0.66706	0.58233	0.50336	0.4292	0.35912	0.29258	0.22912	0.1684	0.11013
$j = 6$ $t = 0.75$	0.97298	0.85985	0.75891	0.66704	0.5822	0.50334	0.4291	0.35912	0.29257	0.22911	0.1683	0.11013
$j = 7$ $t = 0.875$	0.97299	0.85986	0.75892	0.66707	0.58233	0.50336	0.4292	0.35912	0.29258	0.22912	0.1685	0.11013
$j = 8$ $t = 1$	0.95624	0.86458	0.78003	0.70123	0.62722	0.5573	0.4909	0.42758	0.367	0.30885	0.25291	0.19897
$j = 9$ $t = 1.125$	0.95615	0.8645	0.77996	0.70117	0.62718	0.55726	0.49087	0.42756	0.36698	0.30884	0.2529	0.14684
$j = 10$ $t = 1.25$	0.97462	0.84428	0.78003	0.70123	0.62722	0.5573	0.4909	0.42758	0.367	0.30885	0.25291	0.096392
$j = 11$ $t = 1.375$	0.95619	0.86454	0.77999	0.7012	0.6272	0.55728	0.49088	0.42757	0.36699	0.30885	0.25291	0.09639
$j = 12$ $t = 1.5$	0.95615	0.8645	0.77996	0.70117	0.62718	0.55726	0.49087	0.42756	0.36698	0.30884	0.2529	0.09635

Tabel 4.27 Nilai temperatur (T_s) dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan metode beda hingga skema Eksplisit

	Temperatur(T_s)											
	$i = 1$ $z = 0.03$	$i = 2$ $z = 0.06$	$i = 3$ $z = 0.09$	$i = 4$ $z = 0.12$	$i = 5$ $z = 0.15$	$i = 6$ $z = 0.18$	$i = 7$ $z = 0.21$	$i = 8$ $z = 0.24$	$i = 9$ $z = 0.27$	$i = 10$ $z = 0.3$	$i = 11$ $z = 0.33$	$i = 12$ $z = 0.36$
$j = 1$ $t = 0.125$	2.1383	1.6889	1.3758	1.1244	0.91026	0.72186	0.55256	0.3982	0.25592	0.1237	1.1536	1.0383
$j = 2$ $t = 0.25$	2.1384	1.689	1.3758	1.1244	1.1244	0.72189	0.55258	0.39821	0.25593	0.1237	1.3758	1.1244
$j = 3$ $t = 0.375$	1.9805	1.7563	1.5743	1.418	1.2792	1.1536	1.0383	0.93132	0.83125	0.73708	0.648	0.56337

$j = 4$ $t = 0.5$	1.9804	1.7562	1.5742	1.4179	1.2792	1.1536	1.0382	0.93127	0.83122	0.73705	0.64797	0.56335
$j = 5$ $t = 0.625$	1.9048	1.7928	1.6929	1.602	1.5182	1.4401	1.3667	1.2974	1.2316	1.1688	1.1087	1.0511
$j = 6$ $t = 0.75$	1.9046	1.7927	1.6928	1.6019	1.5181	1.44	1.3666	1.2973	1.2315	1.1687	1.1087	1.051
$j = 7$ $t = 0.875$	1.9806	1.7564	1.5744	1.4181	1.2793	1.1537	1.0384	0.93136	0.83129	0.73711	0.64802	0.56339
$j = 8$ $t = 1$	1.9804	1.7562	1.5742	1.4179	1.2792	1.1536	1.0383	0.93127	0.83122	0.73705	0.64797	0.56335
$j = 9$ $t = 1.125$	1.9049	1.7929	1.693	1.6021	1.5183	1.4402	1.3668	1.2975	1.2316	1.1688	1.1088	1.0511
$j = 10$ $t = 1.25$	1.9046	1.7927	1.6928	1.6019	1.5181	1.44	1.3666	1.2973	1.2315	1.1687	1.1087	1.051
$j = 11$ $t = 1.375$	1.9051	1.7931	1.6932	1.6023	1.5185	1.4403	1.3669	1.2976	1.2318	1.169	1.1089	1.0512
$j = 12$ $t = 1.5$	1.9804	1.7562	1.5742	1.4179	1.2792	1.1536	1.0383	0.93127	0.83122	0.73705	0.71795	0.69595

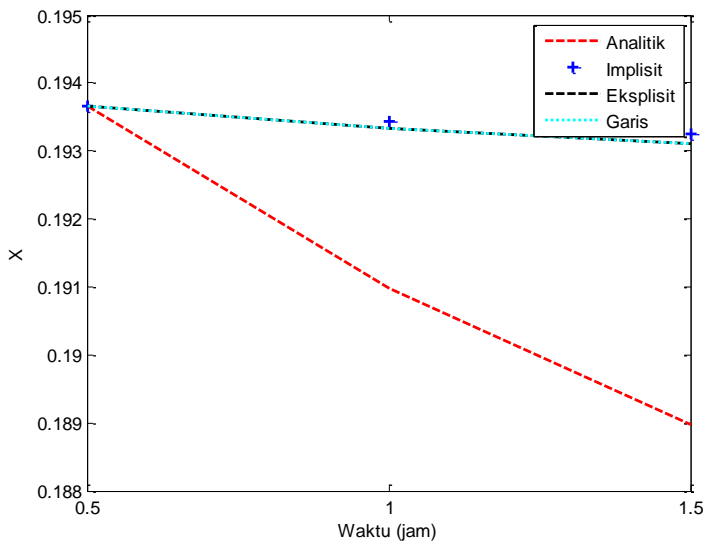
Tabel4.28 Nilai temperatur(T_s)dengan $\Delta z = 0.03$, $\Delta t = 0.125$ menggunakan MOL

	j											
	$j = 1$ $t = 0.125$	$j = 2$ $t = 0.25$	$j = 3$ $t = 0.375$	$j = 4$ $t = 0.5$	$j = 5$ $t = 0.625$	$j = 6$ $t = 0.75$	$j = 7$ $t = 0.875$	$j = 8$ $t = 1$	$j = 9$ $t = 1.125$	$j = 10$ $t = 1.25$	$j = 11$ $t = 1.375$	$j = 12$ $t = 1.5$
X	0.97812	0.92403	0.8679	0.80953	0.74867	0.68503	0.61824	0.54786	0.47332	0.39388	0.30857	0.21602

Setelah diperoleh nilai X dan T_s , kemudian dibuat grafiknya. Untuk melihat selisih nilai eksak dan nilai perhitungan numerik, maka grafik yang dibuat adalah grafik nilai X di setiap Δz dan Δt yang diberikan.

Simulasi 1

Ketika $\Delta t = 0,5$, nilai kadar kelembaban biji (X) diberikan dalam kurva berikut

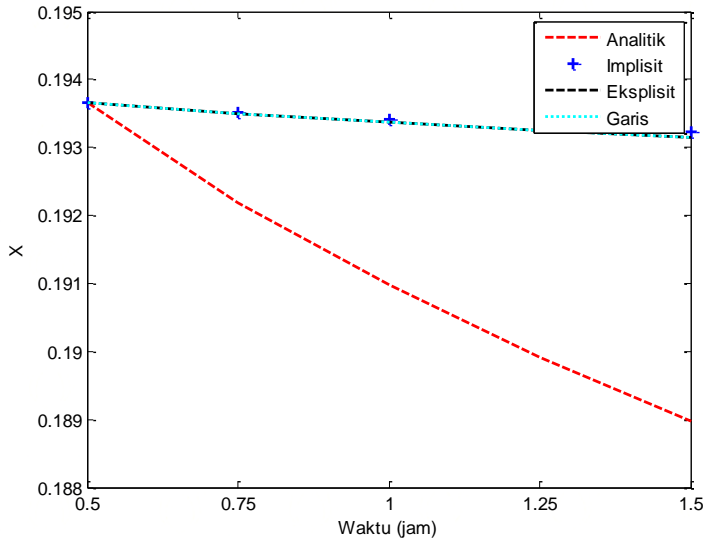


Gambar 4.4 Nilai X ketika $\Delta t = 0,5$

Nampak bahwa selisih antara nilai X analitik dan X MOL adalah yang terkecil jika dibandingkan dengan metode beda hingga skema Implisit dan Eksplisit.

Simulasi 2

Ketika $\Delta t = 0,25$, nilai kadar kelembaban biji (X) diberikan dalam kurva berikut

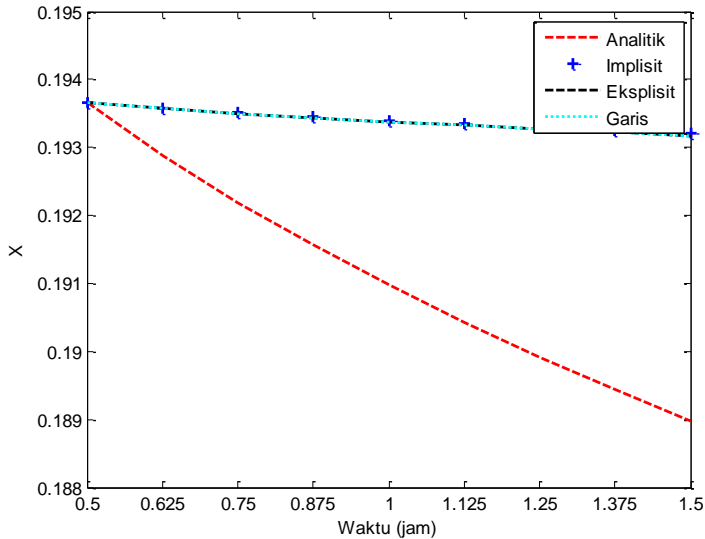


Gambar 4.5 Nilai X ketika $\Delta t = 0,25$

Nampak bahwa untuk $\Delta t = 0,25$, selisih antara nilai kelembaban biji X analitik dan X perhitungan MOL (galat) lebih kecil jika dibandingkan dengan $\Delta t = 0,5$

Simulasi 3

Ketika $\Delta t = 0,125$, nilai kadar kelembaban biji (X) diberikan dalam kurva berikut



Gambar 4.6 Nilai X ketika $\Delta t = 0,125$

Nampak bahwa untuk $\Delta t = 0,25$, selisih antara nilai kelembaban biji X analitik dan X perhitungan MOL (galat) lebih kecil jika dibandingkan dengan $\Delta t = 0,25$ dan $\Delta t = 0,25$.

4.4 Uji Kestabilan

Untuk menguji kestabilan metode beda hingga skema implisit, eksplisit, dan MOL digunakan kriteria kestabilan von Neumann.

4.4.1 Metode beda hingga skema Implisit

Kestabilan metode beda hingga skema Implisit adalah sebagai berikut

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wi,j+1} a$$

Persamaan di atas diubah ke dalam bentuk

$$X_{j,n+1} = X_{j,n} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wj,n+1} a \quad (4.14)$$

Kemudian disubstitusikan $X_{j,n} = \rho^n e^{iaj}$, nilai $\frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wj,n+1} a$ dianggap 0, sehingga persamaan (4.14) menjadi

$$\rho^{n+1} e^{iaj} = \rho^n e^{iaj} \quad (4.15)$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$ diperoleh $\rho = 1$, maka persamaan (4.14) dapat dikatakan Stabil.

Selanjutnya adalah uji kestabilan persamaan kedua.

$$\begin{aligned} \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s,i,j+1} - T_{s,i,j}}{\Delta t} \right) \\ = -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{a,i+1,j+1} - T_{a,i,j+1}}{\Delta z} \right) - a L_g n_{wi,j+1} \end{aligned}$$

Persamaan di atas diubah ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{s,j,n+1} - T_{s,j,n}}{\Delta t} \right) = -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{s,j,n+1} - T_{s,j-1,n+1}}{\Delta z} \right) \\ - a L_g n_{wi,j+1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dimisalkan : $\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} = B$, $\frac{-G_a C_{pa}}{\Delta z} = C$, dan $a L_g n_{wi,j+1}$ dianggap nol. Kemudian disubstitusikan $T_{s,j,n} = \rho^n e^{iaj}$, maka diperoleh persamaan

$$B(\rho^{n+1} e^{iaj} - \rho^n e^{iaj}) = C(\rho^{n+1} e^{iaj} - \rho^{n+1} e^{ia(j-1)}), \quad (4.17)$$

kedua ruas dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$, didapatkan

$$\rho B - 1 = \rho C - \rho C e^{-ia}$$

$$\rho B + \rho C e^{-ia} - \rho C = 1$$

$$\rho(B + C e^{-ia} - C) = 1$$

$$\rho = \frac{1}{(B + C e^{-ia} - C)}$$

$$\rho = \frac{1}{(B + C(e^{-ia} - 1))}$$

Metode beda hingga skema Implisit akan stabil jika memenuhi kondisi $\frac{1}{(B + C(e^{-ia} - 1))} \leq 1$, dimana $B = \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}$ dan $C = \frac{-G_a C_{pa}}{\Delta z}$

$$\frac{1}{(B + C(e^{-ia} - 1))} \leq 1$$

$$\frac{1}{\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} e^{-ia} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta z}} \leq 1$$

$$\frac{1}{\frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} - \frac{G_a C_{pa}(e^{-ia} - 1)}{\Delta z}} \leq 1$$

$$\frac{\Delta z \Delta t}{\Delta z \rho_{bo} C_{ps} - \Delta t G_a C_{pa}(e^{-ia} - 1)} \leq 1$$

dimisalkan: $\rho_{bo} C_{ps} = c$ dan $G_a C_{pa}(e^{-ia} - 1) = d$, maka

$$\frac{\Delta z \Delta t}{c \Delta z - d \Delta t} \leq 1$$

Dengan kata lain, persamaan (4.16) akan stabil jika memenuhi kondisi $\frac{\Delta z \Delta t}{c \Delta z - d \Delta t} \leq 1$

4.4.2 Metode beda hingga skema Eksplisit

Sedangkan uji kestabilan metode beda hingga skema Eksplisit, adalah

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wi,j+1} a$$

Persamaan diubah ke dalam bentuk

$$X_{j,n+1} = X_{j,n} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wj,n+1} a \quad (4.18)$$

Kemudian disubstitusikan $X_{j,n} = \rho^n e^{iaj}$, nilai $\frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{wj,n+1} a$ dianggap 0, sehingga persamaan (4.18) menjadi

$$\rho^{n+1} e^{iaj} = \rho^n e^{iaj} \quad (4.19)$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$ diperoleh $\rho = 1$, maka persamaan (4.18) dapat dikatakan stabil. Selanjutnya adalah uji kestabilan persamaan kedua.

$$\rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{si,j+1} - T_{si,j}}{\Delta t} \right) = -a L_g n_{wi,j} - G_a C_{pa} \left(\frac{T_{ai+1,j} - T_{ai,j}}{\Delta z} \right)$$

Persamaan dia atas diubah ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} \rho_{bo} C_{ps} \left(\frac{T_{sj,n+1} - T_{sj,n}}{\Delta t} \right) &= -a L_g n_{wi,j} \\ -G_a C_{pa} \left(\frac{T_{sj,n} - T_{sj-1,n}}{\Delta z} \right) & \end{aligned} \quad (4.20)$$

dimisalkan : $\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} = B$, $\frac{-G_aC_{pa}}{\Delta z} = C$, dan $aL_g n_{wi,j+1}$ dianggap nol. Disubstitusikan $T_{s,j,n} = \rho^n e^{iaj}$, maka diperoleh persamaan

$$B(\rho^{n+1}e^{iaj} - \rho^n e^{iaj}) = C(\rho^n e^{iaj} - \rho^n e^{ia(j-1)}). \quad (4.21)$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$, didapat

$$\rho B - 1 = C - e^{-ia}$$

$$\rho B = 1 + C - e^{-ia}$$

$$\rho = \frac{1 + C - e^{-ia}}{B}$$

Persamaan (4.20) akan stabil jika $\frac{1+C-e^{-ia}}{B} \leq 1$, dimana $B = \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}$ dan $C = \frac{-G_aC_{pa}}{\Delta z}$. Faktor amplifikasi $\rho \leq 1$, dengan kata

$$\text{lain } \frac{1+C-e^{-ia}}{B} \leq 1$$

$$1 - \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} - e^{-ia} \leq \frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta z - G_aC_{pa} - \Delta z e^{-ia}}{\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}} \leq 1$$

$$\frac{\Delta z(1 - e^{-ia}) - G_aC_{pa}}{\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t}} \leq 1$$

$$\frac{\Delta z(1 - e^{-ia}) - G_aC_{pa}}{\rho_{bo}C_{ps}} \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1$$

Dimisalkan: $\frac{\Delta z(1 - e^{-ia}) - G_aC_{pa}}{\rho_{bo}C_{ps}} = c$, maka persamaan (4.20) akan memenuhi kriteria stabil jika $c \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1$

4.4.3 Method of Lines (MOL)

Untuk menguji kestabilan *Method of Lines*, pada persamaan pertama disubstitusikan $X_j = \rho e^{iaj}$. Persamaan $X_{i+1} = X_i - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_i} a$ terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk

$$X_{j+1} = X_j - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_i} a \quad (4.22)$$

Nilai $\frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_i} a$ dapat diabaikan sehingga persamaan menjadi

$$\rho e^{ia(j+1)} = \rho e^{iaj} \quad (4.23)$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan ρe^{iaj} . Sehingga diperoleh $e^{iaj} = 1$. Dengan cara yang sama, untuk kestabilan persamaan T_s dengan diskritisasi menggunakan MOL, kestabilan yang sama. Dengan kata lain, MOL selalu stabil karena tidak tergantung nilai Δz dan Δt .

4.5 Studi Perbandingan Metode Numerik

Berdasarkan hasil perhitungan yang didapat, serta uji kestabilan yang diterapkan pada masing-masing metode, diperoleh hasil perbandingan antara tiga metode. Berikut adalah hasil dari membandingkan ketiga metode.

Tabel 4.29 Perbandingan Metode Numerik

Metode	Indikator pembeding	
	kestabilan	galat
Beda Hingga Implisit	stabil jika memenuhi kondisi $\frac{\Delta z \Delta t}{c \Delta z - d \Delta t} \leq 1$	Titik di posisi z dan di waktu t , galat potongan berubah-ubah
Beda Hingga Eksplisit	stabil jika memenuhi kondisi $c \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1$	Titik di posisi z dan di waktu t , galat potongan berubah-ubah
<i>Method of</i>	Selalu stabil dengan	Untuk $\Delta z \rightarrow 0$

<i>LinesMethod</i> <i>Lines</i> (MOL)	<i>of</i>	$e^{ia} = 1$, kestabilan tergantung Δt dan Δz	dimana tidak besarnya	dan $\Delta t \rightarrow 0$, galat yang dihasilkan semakin kecil
--	-----------	---	-----------------------------	---

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari hasil yang telah didapatkan setelah melakukan analisis mengenai penyelesaian numerik model, simulasi numerik, uji kestabilan dan studi perbandingan metode. Selain itu, memberikan saran pada pembahasan yang telah dilakukan untuk dikaji dengan lebih mendalam.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil perhitungan numerik dan uji kestabilan pada model pengeringan suhu rendah yang dikaji pada bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Penyelesaian model menggunakan metode beda hingga skema implisit adalah

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_{i,j+1}} a$$

dan matriks tridiagonal $\mathbf{AT}_{s_{i,j}} = \mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & 0 \cdots 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_aC_{pa}}{\Delta z} \right) & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s_{1,2}} \\ T_{s_{1,3}} \\ T_{s_{1,4}} \\ \vdots \\ T_{s_{1N}} \\ T_{s_{1N+1}} \\ T_{s_{2,2}} \\ T_{s_{2,3}} \\ T_{s_{2,4}} \\ \vdots \\ T_{s_{2,N}} \\ T_{s_{2+1}} \\ T_{s_{3,2}} \\ T_{s_{3,3}} \\ T_{s_{3,4}} \\ \vdots \\ T_{s_{3,N}} \\ T_{s_{3,N+1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ -aL_g n_{w_{1,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{1,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ -aL_g n_{w_{2,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,N+1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ -aL_g n_{w_{3,4}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,N+1}} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai $T_{s_{i,j}} = A^{-1}B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} T_{s_{3,1}} & \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} + \frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} \right) \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_{bo}C_{ps}}{\Delta t} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

dan $B =$
$$\begin{bmatrix} -aL_g n_{w1,2} \\ -aL_g n_{w1,3} \\ -aL_g n_{w1,4} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w1,N} \\ -aL_g n_{w1,N+1} \\ -aL_g n_{w2,2} \\ -aL_g n_{w2,3} \\ -aL_g n_{w2,4} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w2,N} \\ -aL_g n_{w2,N+1} \\ -aL_g n_{w3,2} \\ -aL_g n_{w3,3} \\ -aL_g n_{w3,4} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w3,N} \\ -aL_g n_{w3,N+1} \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian model menggunakan metode beda hingga skema eksplisit adalah

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_{b0}} (n_{w_{i,j}} a)$$

dan matriks tridiagonal $CT_{s_{i,j}} = D$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s1,1} \\ T_{s1,2} \\ T_{s1,3} \\ \vdots \\ T_{s1,N-1} \\ T_{s1,N} \\ T_{s2,1} \\ T_{s2,2} \\ T_{s2,3} \\ \vdots \\ T_{s2,N-1} \\ T_{s2,N} \\ T_{s3,1} \\ T_{s3,2} \\ T_{s3,3} \\ \vdots \\ T_{s3,N-1} \\ T_{s3,N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,1}} \\ -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai $T_{s_{i,j}} = C^{-1}D$, dimana

$$C = \begin{bmatrix} \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} & 0 & 0 & \left(\frac{G_a C_{pa}}{\Delta Z} - \frac{\rho_{b0} C_{ps}}{\Delta t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s_{1,1}} \\ T_{s_{1,2}} \\ T_{s_{1,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{1,N-1}} \\ T_{s_{1,N}} \\ T_{s_{2,1}} \\ T_{s_{2,2}} \\ T_{s_{2,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{2,N-1}} \\ T_{s_{2,N}} \\ T_{s_{3,1}} \\ T_{s_{3,2}} \\ T_{s_{3,3}} \\ \vdots \\ T_{s_{3,N-1}} \\ T_{s_{3,N}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } D = \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_{1,1}} \\ -aL_g n_{w_{1,2}} \\ -aL_g n_{w_{1,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{1,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{1,N}} \\ -aL_g n_{w_{2,1}} \\ -aL_g n_{w_{2,2}} \\ -aL_g n_{w_{2,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{2,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{2,N}} \\ -aL_g n_{w_{3,1}} \\ -aL_g n_{w_{3,2}} \\ -aL_g n_{w_{3,3}} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{3,N-1}} \\ -aL_g n_{w_{3,N}} \end{bmatrix}$$

3. Penyelesaian model menggunakan *Method of Lines* (MOL) adalah

$$X_{i+1} = X_i - \frac{\Delta t}{\rho_{bo}} n_{w_i} a$$

dan matriks tridiagonal $\mathbf{ET}_{s,i,j} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s_0} \\ T_{s_1} \\ T_{s_2} \\ T_{s_3} \\ T_{s_4} \\ \vdots \\ T_{s_{N-1}} \\ T_{s_N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_1} \\ -aL_g n_{w_2} \\ -aL_g n_{w_3} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{N-1}} \\ -aL_g n_{w_N} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai $T_{s,i,j} = E^{-1}F$, dimana

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} & \left(\frac{G_a C_{ps}}{\Delta z} + \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t}\right) & \frac{\rho_{bo} C_{ps}}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

dan $F = \begin{bmatrix} -aL_g n_{w_1} \\ -aL_g n_{w_2} \\ -aL_g n_{w_3} \\ \vdots \\ -aL_g n_{w_{N-1}} \\ -aL_g n_{w_N} \end{bmatrix}$

4. Metode beda hingga skema implisit stabil jika memenuhi kondisi $\frac{\Delta z \Delta t}{c \Delta z - d \Delta t} \leq 1$
5. Metode beda hingga skema eksplisit stabil jika memenuhi kondisi $c \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1$
6. *Method of Lines* (MOL) selalu stabil dengan $e^{ia} = 1$, dimana kestabilan tidak bergantung pada nilai Δt dan Δz yang diberikan.
7. Galat potongan yang dihasilkan dari perhitungan numerik menggunakan metode beda hingga skema Implisit dan Eksplisit di posisi z dan di waktu t berubah-ubah.
8. Untuk $\Delta z \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, galat yang dihasilkan dari perhitungan menggunakan MOL semakin kecil
9. Dari hasil perhitungan dan uji kestabilan, diperoleh hasil *Method of Lines* (MOL) merupakan metode terbaik jika dibandingkan dengan metode beda hingga skema Implisit

dan Eksplisit dalam menyelesaikan model pengeringan suhu rendah dengan pengambilan $\Delta z_1 = 0,12$, $\Delta z_2 = 0,06$ dan $\Delta z_3 = 0,03$, serta $\Delta t_1 = 0,5$, $\Delta t_2 = 0,25$ dan $\Delta t_3 = 0,125$.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini tidak dibahas mengenai konvergensi dan konsistensi metode. Untuk selanjutnya dapat dilakukan perbandingan dengan menggunakan metode lain, serta dapat juga dilakukan uji konsistensi dan konvergensi.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dalpasquale, V.A., Sperandio,D., Kolling, E.M., 2009. "Performance of the Michigan Drying Simulation Model with a New Drying Rate Concept". **Acta Scientarum**. Hal 553-557
- [2] Martinello, M.A., Munoz, D.J., Giner, S.A., Januari 2013. "Mathematical Modelling of Low Temperature of Maize: Comparison of Numerical Methods for Solving the Differential Equation". **Biosystem Engineering** **114**. Hal.187-194
- [3] Sarwono, R., 2005."Pengeringan Suhu Rendah untuk Menjaga Mutu Bahan Pertanian." **Jurnal Teknologi dan Industri Pangan LIPI**. Vol.XVI. No.2. Hal.168-173
- [4] Soehardjo. 2004. **Persamaan Diferensial Parsial**. Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya
- [5] Math York. finite difference Method. 2015. URL<http://www.math.yorku.ca/~hmzhu/Math6911/lectures/Lecture5/5_Blksch_FDM.pdf> Diakses 13 Juli 2015
- [6] Supriyono, Sudarti, 2000. "Metode Beda Hingga Pada Kajian Pemodelan Dispersi Radioaktivitas ke Lingkungan Tanah". **Prosiding Pertemuan dan Presentasi Ilmiah Penelitian Dasar Ilmu Pengetahuan dan Teknologi Nuklir**. P3TM-BATAN Yogyakarta.
- [7] Tiendall, H. 2012. **Element and Analysis of Partial Differential Equation**. Delhi:Research World.
- [8] Sadiku, M.N.O., Obizor, C.N., "A simple introduction to the method of lines." **International Jurnal of Electrical Engineering Education** 37/3. Hal.282-296

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN

LISTING PROGRAM

%% Input Data Awal

```
Waktu_Awal = input('Masukkan Waktu Awal = ');
Waktu_Akhir = input('Masukkan Waktu Akhir = ');
delta_t = input('Masukkan Perubahan Waktu (delta t) = ');
Panjang_Awal = input('Masukkan Panjang Awal = ');
Panjang_Akhir = input('Masukkan Panjang Akhir = ');
delta_z = input('Masukkan Perubahan Panjang (delta z) = ');
k3 = 0;
for k2=1:length(delta_z)
    z = [];
    z = Panjang_Awal:delta_z(k2):Panjang_Akhir;
    for k1=1:length(delta_t)
        t = [];
        t = Waktu_Awal:delta_t(k1):Waktu_Akhir;
        disp(' ');
        a=1132;
        ap=2264;
        pbo=3750;
        Ga=0.03;
        rha=0.6;
        Xo=0.2;
        Y=0.0088;
        Tao=20;
        pso=730;
        phb=750;
        eps=0.5;
        C1=486.1; C2=56.98; C3=0.1807;
        Cpss = 1465;
        Cpw=3560;
        Cpas = 1008;
        Cpv = 1883;
```

```

Cpa = Cpas+Cpv*Y;
Xe = -(1/(100*C3))*log(-(log(0.6)*(Tao+C2))/486.1);
K = -0.0347+0.00287*(((9*Tao)/5)+32);
N=0.54+0.00324*rha;
Lg=2503000-2386*(Tao-273.16);
for j=1:length(t)
X_Analitik(k1,j)=(Xo-Xe)*exp(-K*(t(j))^N)+Xe;%D
nw(k1,j)=(pso/ap)*K*N*((X_Analitik(k1,j)-Xe)*t(j)^(N-1));
Cps(k1,j) = Cpss+Cpw*X_Analitik(k1,j);
end
X_Analitik
X_Implisit(k1,1) = X_Analitik(k1,1);
for j=1:length(t)-1
X_Implisit(k1,j+1) = X_Implisit(k1,j)-
((delta_t(k1)/pbo))*(nw(k1,j+1)*a);
end
X_Implisit
k=2;
disp('Hasil Ts Implisit');
a11 = []; b11 = []; B11 = [];
for j=1:length(t)
a11(j) = pbo*Cps(k1,j)/delta_t(k1);
b11(j) = Ga*Cpa/delta_z(k2);
B11(j) = -a*Lg*nw(k1,j);
end
a21 = []; b21 = []; B1 = []; b31 = [];
for d=1:length(delta_t)
a21 = [a21 a11];
b21 = [b21 (a11(2:length(t))+b11(2:length(t))) 0];
B1 = [B1; B11'];
if d>1
b31 = [b31 0 -b11(2:length(t))];
end
end

```

```

a21;
b21;
b31;
A1 = []; Ts_Implisit = [];
A1 = diag(-a21,0) + diag(b21(1:length(b21)-1),1)+ diag([b31 0],-
(length(t)-1));
B1;
disp(['Ketika Waktu ',num2str(Waktu_Awal+delta_t(k1)),' jam
pada panjang ', num2str(Panjang_Awal+delta_z(k2)),' m']);
Ts_Implisit = inv(A1)*B1
Ts1 = [];
for d=1:length(delta_t)
Ts1 = [Ts1; Ts_Implisit(1:length(t))];
end
X_Eksplisit(k1,1) = X_Analitik(k1,1);
for j=1:length(t)-1
X_Eksplisit(k1,j+1) = X_Eksplisit(k1,j)-
((delta_t(k1)/pbo))*(nw(k1,j)*a);
end
X_Eksplisit
disp('Hasil Ts Eksplisit');
a12 = []; b12 = []; B12 = [];
for j=1:length(t)
a12(j) = pbo*Cps(k1,j)/delta_t(k1);
b12(j) = Ga*Cpa/delta_z(k2);
B12(j) = -a*Lg*nw(k1,j);
end
a22 = []; b22 = []; B2 = []; b32 = [];
for d=1:length(delta_t)
a22 = [a22 a12(2:length(t)) 0];
b22 = [b22 (b12-a12)];
B2 = [B2; B12];
if d>1
b32 = [b32 -b12];
end

```

```

end
A2 = []; Ts_Eksplisit = [];
A2 = diag(b22,0) + diag((a22(1:length(a22)-1)),1)+ diag(b32,-
length(t));
B2;
disp(['Ketika Waktu ',num2str(Waktu_Awal+delta_t(k1)),' jam
pada panjang ',...
num2str(Panjang_Awal+delta_z(k2)),' m']);
Ts_Eksplisit = inv(A2)*B2
Ts2 = [];
for d=1:length(delta_t)
Ts2 = [Ts2; Ts_Eksplisit(1:length(t))];
end
X_Garis(k1,1) = X_Analitik(k1,1); disp('X garis');
for j=1:length(t)-1
X_Garis(k1,j+1) = X_Garis(k1,j) -
((delta_t(k1)/pbo))*(nw(k1,j)*a);
end
X_Garis
disp('Hasil Ts Eksplisit');
a13 = []; b13 = []; B13 = [];
for j=1:length(t)
a13(j) = pbo*Cps(k1,j)/delta_t(k1);
b13(j) = Ga*Cpa/delta_z(k2);
B13(j) = -a*Lg*nw(k1,j);
end
Ts_Garis = [];
Ts_Garis = 0*ones(1,2); k=0;% k1=1;
for j=1:(length(t)-2)+2*length(t)
if k<length(t)
k = k+1;
Ts_Garis(j+2) = ((a12(k)+b13(k))*Ts_Garis(j+1) +...
b13(k)*Ts_Garis(j)+B13(k))/a13(k);
else
k = 1;

```

```

Ts_Garis(j+2) = ((a12(k)+b13(k))*Ts_Garis(j+1) +...
b13(k)*Ts_Garis(j)+B13(k))/a13(k);
end
end
Ts_Garis = Ts_Garis';
Ts3 = [];
for d=1:length(delta_t)
Ts3 = [Ts3; Ts_Garis(1:length(t))];
end
disp(['Ketika Waktu ',num2str(Waktu_Awal+delta_t(k1)),' jam
pada panjang ',...
num2str(Panjang_Awal+delta_z(k2)),' m']);
Ts_Garis
t
for i=1:length(t)
Waktu(i) = {num2str(t(i))};
{sprintf('%f',t(i))};
end
Waktu
k3 = k3+1;
figure(k3);
plot(X_Analitik(k1,:), 'r--', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(X_Implisit(k1,:), 'b+', 'LineWidth', 2);
plot(X_Eksplisit(k1,:), 'k--', 'LineWidth', 2);
plot(X_Garis(k1,:), 'c:', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (jam)');
ylabel('X');
set(gca, 'XTick', 1:length(t));
set(gca, 'XTickLabel', Waktu);
legend('Analitik', 'Implisit', 'Eksplisit', 'Garis');
k3 = k3+1;
figure(k3);
plot(Ts1(k1,:), 'b+', 'LineWidth', 2);
hold on;

```



```

plot(Ts2(k1,:), 'k--', 'LineWidth', 2);
plot(Ts3(k1,:), 'c:', 'LineWidth', 2);
title(['Plot Grafik Ts untuk \Delta t = ', num2str(delta_t(k1)), ...
\Delta z = ', num2str(delta_z(k2))], 'fontweight', 'b');
xlabel('Waktu (jam)');
ylabel('Ts');
set(gca, 'XTick', 1:length(t));
set(gca, 'XTickLabel', Waktu);
legend('Implisit', 'Eksplisit', 'Garis');
end

```

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Ulva Qusniah, lahir 20 Agustus 1993 di Besuki, Tulungagung. Penulis adalah anak kedua dari dua bersaudara. Saat ini penulis menetap di Kelurahan Semampir Selatan Kecamatan Sukolilo Surabaya. Penulis lulus dari TK Dharma Wanita II Tanggul Welahan, SDN Tanggul Welahan I, SMP Negeri 1 Besuki, dan SMA Negeri 1 Boyolangu lulus pada tahun 2011. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan kuliah ke Jurusan Matematika ITS dan terdaftar di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis Program Bidik Misi dengan NRP 1211 100 062. Selama kuliah di Jurusan Matematika ITS, penulis mengambil Bidang Studi Matematika Terapan. Selain menjalani studi, penulis juga aktif mengikuti kelas Bahasa Arab di STAI Ali bin Abi Thalib Surabaya dan di Yayasan Sosial Thoyibah Keputih. Selain itu penulis juga memiliki pengalaman sebagai tutor. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat menghubungi penulis melalui *e-mail* ulvahusna@gmail.com